

ББК 22.31  
А95  
УДК 537.8

**АХИЕЗЕР А. И., ШУЛЬГА Н. Ф.** Электродинамика высоких энергий в веществе.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1993.— 344 с.— ISBN 5-02-014506-8.

Посвящена теории электромагнитных процессов, сопровождающих прохождение частиц высоких энергий через вещество. С единой точки зрения изложена теория процессов рассеяния, излучения, образования электронно-позитронных пар и развития электромагнитных ливней в аморфных и кристаллических средах, а также в интенсивных внешних электромагнитных полях. Рассмотрены теория динамического хаоса при прохождении быстрых частиц через кристаллы и применение метода функционального интегрирования в теории излучения.

Рассчитана на широкий круг читателей — теоретиков и экспериментаторов, работающих в области физики высоких энергий и элементарных частиц, а также аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

Табл. 6. Ил. 84. Библиогр. 344 назв.

Рецензент

доктор физико-математических наук *М. И. Рязанов*

Научное издание

*АХИЕЗЕР Александр Ильич, ШУЛЬГА Николай Федорович*

**ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ В ВЕЩЕСТВЕ**

Заведующий редакцией *Н. А. Носова*. Редактор *Г. М. Карасева*  
Младший редактор *Е. Б. Тихонова*. Художественный редактор *Л. Н. Романенкова*  
Технические редакторы *Т. М. Андреева, Е. В. Морозова*  
Корректоры *М. Н. Дронова, Л. С. Сомова*

ИБ № 41135

---

Сдано в набор 08.10.90. Подписано к печати 11.06.91. Формат 60×90/16; Бумага тип. № 1. Гарнитура таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 21,5. Усл. кр.-отт. 21,5.  
Уч. изд. л. 22,83. Тираж 1200 экз. Заказ № 4301. С-016

---

Издательско-производственное и книготорговое объединение «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. 117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

---

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография» Государственного комитета СССР по печати. 113054 Москва, Валовая, 28.

---

Отпечатано с диапозитивов в Московской типографии № 2 ВО «Наука». 12099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6

А  $\frac{1604030000-016}{053(02)-92}$  КБ -12 - 351 - 93

© «Наука». Физматлит, 1993

ISBN 5-02-014506-8

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	7
Основные обозначения .....	9

### Глава 1

#### Классическая теория излучения быстрой заряженной частицей

§ 1. Движение заряженной частицы во внешнем поле .....	11
§ 2. Поле, создаваемое движущейся частицей .....	12
§ 3. Интенсивность излучения .....	14
§ 4. Длина когерентности .....	18
§ 5. Излучение при различных соотношениях между углами рассеяния и излучения релятивистской частицы .....	21
§ 6. Ондюляторное излучение .....	23
§ 7. Излучение при резком изменении траектории частицы .....	28
§ 8. Излучение в случае многих столкновений электрона на длине когерентности .....	29

### Глава 2

#### Квантовая теория излучения в области высоких энергий

§ 9. Волновая функция быстрой частицы во внешнем поле .....	33
§ 10. Упругое рассеяние при высоких энергиях .....	39
§ 11. Рассеяние быстрых частиц цепочкой атомов .....	42
§ 12. Излучение фотона и образование электронно-позитронной пары в первом борновском приближении .....	48
§ 13. Понятие длины когерентности в квантовой теории .....	52
§ 14. Сечения излучения и образования электронно-позитронных пар в эйкональном приближении .....	56
§ 15. Учет квантовой поправки к интенсивности синхротронного излу- чения .....	62
§ 16. Излучение при высоких энергиях в квазиклассическом прибли- жении .....	69
§ 17. Излучение фотона электроном в квазиклассическом приближении .....	76

### Глава 3

#### Радиационные процессы при высоких энергиях в аморфной среде

§ 18. Параметры, характеризующие радиационные процессы при высоких энергиях в аморфной среде .....	79
---	----

§ 19. Влияние поляризации среды на излучение .....	83
§ 20. Многократное рассеяние быстрых заряженных частиц в аморфной среде .....	85
§ 21. Эффект Ландау—Померанчука .....	90
§ 22. Учет влияния многократного рассеяния на излучение методом кинетического уравнения .....	92
§ 23. Усреднение по траекториям спектра излучения методом функционального интегрирования .....	95
§ 24. Метод функционального интегрирования в квантовой теории излучения .....	98
§ 25. Упругое рассеяние быстрой частицы в тонкой мишени .....	100
§ 26. Излучение и образование электронно-позитронных пар в тонком слое вещества .....	104

#### Глава 4

##### **Теория когерентного излучения и образования электронно-позитронных пар при высоких энергиях в кристаллах**

§ 27. Сечение излучения в первом борновском приближении .....	107
§ 28. Влияние периодичности в расположении атомов на излучение .....	111
§ 29. Излучение при движении электрона вблизи кристаллографической оси (борновское приближение) .....	114
§ 30. Излучение при движении вблизи кристаллографической плоскости (борновское приближение) .....	119
§ 31. Высшие борновские приближения в теории излучения .....	121
§ 32. Классическая теория когерентного излучения .....	125
§ 33. Условия применимости результатов теории когерентного излучения .....	127
§ 34. Когерентное образование в кристалле электронно-позитронных пар фотоном .....	129

#### Глава 5

##### **Регулярное и хаотическое движение быстрых заряженных частиц в кристаллических полях**

§ 35. Приближение непрерывных цепочек .....	134
§ 36. Возможность стохастического движения заряженной частицы в кристалле .....	140
§ 37. Регулярное и нерегулярное движение релятивистских электронов при аксиальном каналировании .....	145
§ 38. Рассеяние быстрых заряженных частиц на отдельной цепочке атомов .....	149
§ 39. Квантовые эффекты при рассеянии частиц на цепочке атомов .....	156
§ 40. Регулярное и хаотическое движение надбарьерных частиц в поле цепочек атомов кристалла .....	161
§ 41. Многократное рассеяние на цепочках атомов .....	168

#### Глава 6

##### **Излучение фотонов заряженными частицами в поле кристаллических плоскостей**

§ 42. Движение заряженных частиц в поле непрерывного потенциала кристаллических плоскостей .....	173
--	-----

§ 43. Излучение при углах влета, превосходящих критический угол плоскостного каналирования .....	176
§ 44. Излучение при каналировании и надбарьерном движении .....	178
§ 45. Влияние расходимости частиц в пучке на излучение .....	183
§ 46. Учет недипольности излучения .....	185
§ 47. Квантовая теория излучения фотонов заряженными частицами в поле кристаллических плоскостей .....	188
§ 48. Влияние неоднородности потенциала плоскости на излучение .....	195

## Глава 7

### Излучение фотонов при движении заряженных частиц вблизи кристаллографической оси

§ 49. Излучение релятивистских электронов и позитронов в поле цепочки атомов кристалла .....	200
§ 50. Излучение при аксиальном каналировании ультрарелятивистских электронов .....	205
§ 51. Учет недипольности излучения в области больших частот .....	212
§ 52. Излучение на цепочке атомов в области малых частот .....	219
§ 53. Влияние многократного рассеяния и поляризации среды на когерентное излучение .....	221
§ 54. Влияние многократного рассеяния на излучение в условиях дипольности излучения .....	226
§ 55. Излучение в тонких кристаллах .....	230

## Глава 8

### Влияние неоднородности потенциала решетки на взаимодействие быстрых частиц с кристаллом

§ 56. Учет столкновений падающей частицы с отдельными атомами решетки .....	235
§ 57. Среднее значение квадрата угла многократного рассеяния быстрой частицы в кристалле .....	240
§ 58. Процессы, связанные с малыми прицельными параметрами .....	245
§ 59. Флюктуации интеграла энергии поперечного движения .....	250
§ 60. Эффекты деканалирования и реканалирования .....	253
§ 61. Деканалирование как диффузия в случайной среде .....	257
§ 62. Учет влияния тепловых колебаний атомов на излучение движущейся в кристалле частицы .....	261

## Глава 9

### Торможение быстрых заряженных частиц в веществе

§ 63. Ионизационные потери энергии заряженной частицей в веществе ....	268
§ 64. Эффект плотности Ферми и черенковские потери энергии .....	271
§ 65. Учет близких столкновений .....	278
§ 66. Флюктуации ионизационных потерь энергии быстрых частиц в веществе .....	281
§ 67. Торможение электронно-позитронных пар и быстрых молекул при прохождении через вещество .....	285

§ 68. Торможение при каналировании .....	288
§ 69. Радиационные потери энергии быстрых частиц во внешнем поле .....	292
§ 70. Радиационные потери энергии релятивистских электронов в аморфной среде .....	298
§ 71. Потери энергии на излучение частицами высоких энергий в кристаллах .....	303

## Глава 10

### Электромагнитные ливни при высоких энергиях

§ 72. Основные уравнения каскадной теории ливней .....	308
§ 73. Развитие электромагнитного ливня в аморфной среде .....	311
§ 74. Развитие электромагнитного ливня в кристалле .....	317
§ 75. Фотонный ливень .....	322
§ 76. Влияние фотонного ливня на образование в кристалле электронно-позитронной пары .....	326
§ 77. Развитие ливня в поликристалле .....	328

### Приложения

1. Вычисление континуального интеграла (23.6) .....	331
2. Дифференциальное сечение и амплитуда рассеяния быстрой заряженной частицы в поле непрерывного потенциала цепочки атомов .....	333
3. Вычисление фаз рассеяния в квазиклассическом приближении .....	335
Список литературы .....	336

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая монография посвящена изложению теории электромагнитных процессов, возникающих при прохождении заряженных частиц и фотонов высоких энергий через вещество. В ней подробно рассматриваются такие процессы, как упругое рассеяние, излучение, образование электронно-позитронных пар, различные механизмы потерь энергии быстрыми частицами и развитие электромагнитных ливней в аморфных и кристаллических средах. Все эти процессы разыгрываются при высоких энергиях в больших, растущих с энергией, пространственных областях вдоль импульсов частиц. При достаточно высоких энергиях эти области имеют макроскопические размеры и охватывают большое число атомов среды. Вследствие этого среда оказывает влияние на указанные электромагнитные процессы при сколь угодно высоких энергиях частиц. По этой причине возникает специальная область электродинамики, которую можно назвать «электродинамикой высоких энергий в веществе».

Исследование многих из перечисленных выше проблем началось в физике очень давно. Пожалуй, исторически первой работой, относящейся к этой области, была классическая работа Бора 1913 г. об ионизационных потерях энергии быстрых частиц в веществе. Важность этого вопроса видна из того, что после появления квантовой механики возникли новые важные работы — статьи Блоха и Бете, посвященные квантовомеханической теории ионизационных потерь, а также работы Ферми об эффекте плотности в теории потерь энергии быстрыми частицами в веществе. Сюда относится также открытие в 1934 г. излучения Вавилова — Черенкова и построение теории этого явления Таммом и Франком. Важную роль сыграли предсказание в 50-х годах Ферретти, Тер-Микаеляна и Юбералла интерференционного эффекта в излучении релятивистских электронов в кристаллах и предсказание Ландау и Померанчука эффекта подавления тормозного излучения релятивистских электронов в аморфной среде. Далее необходимо указать на открытие, сделанное в начале 60-х годов Робинсоном и Оэном, явления каналирования быстрых ионов в кристаллах, первая теория которого была развита Линд-

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \text{— ступенчатая функция Хевисайда.}$$

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{ix \cos \varphi} \text{— функция Бесселя.}$$

$$K_0(x) = \int_0^{\infty} \frac{dt \cos(tx)}{\sqrt{t^2 + 1}} \text{— модифицированная функция Ханкеля.}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} d\xi \cos\left(x\xi + \frac{1}{3}\xi^3\right) \text{— функция Эйри.}$$

$$K_{5/3}(y) = 2\sqrt{3}\pi \frac{d}{dy} \left[ \frac{\Phi'(u)}{u} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\xi \Phi(\xi) \right] \text{— функция, определяющая спектр}$$

синхротронного излучения (5.9),  $u = \left(\frac{3y}{2}\right)^{2/3}$

$$\text{Ei}(-x) = - \int_x^{\infty} \frac{dt}{t} e^{-t} \text{— интегральная показательная функция.}$$

$$u(r) = \frac{Z|e|}{r} e^{-r/R} \text{— экранированный потенциал Кулона (7.5).}$$

Г Л А В А 1  
**КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ  
 БЫСТРОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЕЙ**

**§ 1. Движение заряженной частицы во внешнем поле**

В этой главе мы будем изучать в основном излучение электромагнитных волн заряженной частицей в заданном внешнем поле. Предварительно приведем основные соотношения релятивистской динамики заряженной частицы в заданном электрическом поле напряженности  $\mathbf{E}$  и магнитном поле напряженности  $\mathbf{H}$  [1].

Уравнения движения частицы (уравнения Лоренца) в этих полях имеют вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}], \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}/\sqrt{1-v^2/c^2}$  — импульс частицы,  $m$  и  $e$  — ее масса и заряд,  $\mathbf{v}$  — ее скорость ( $c$  — скорость света).

Кинетическая энергия частицы равна

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (1.2)$$

Она изменяется с течением времени согласно уравнению

$$\frac{dE}{dt} = e(\mathbf{v}\mathbf{E}). \quad (1.3)$$

Из (1.1) и (1.3) легко получить уравнение для ускорения:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{ec^2}{E} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{E}) \right\}. \quad (1.4)$$

Зная скорость частицы  $\mathbf{v}(t)$ , можно найти ее траекторию:

$$\mathbf{r}(t) = \int_{t_0}^t dt' \mathbf{v}(t'), \quad (1.5)$$

где  $t_0$  — начальный момент времени.

В правую часть уравнения (1.4) энергия  $E$  входит в знаменатель. Это означает, что в области высоких энергий изменение скорости частицы мало, поэтому в этой области энергий вектор скорости может быть записан в виде

$$\mathbf{v} \approx \mathbf{v}_0 \left( 1 - \frac{1}{2c^2} v_{\perp}^2(t) \right) + \mathbf{v}_{\perp}(t), \quad (1.6)$$



где  $v_0$  — скорость в начальный момент времени  $t=t_0$ ,  $v_{\perp}(t)$  — изменение скорости в интервале времени  $(t-t_0)$ ; при этом  $v_{\perp} \cdot v_0 = 0$  и  $v_{\perp} \ll v_0$ .

Поперечная составляющая скорости согласно (1.4) удовлетворяет уравнению

$$\dot{v}_{\perp} = \frac{ec^2}{E_0} \left\{ \mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_0, \mathbf{H}] \right\}, \quad (1.7)$$

где  $\mathbf{E}_{\perp}$  — составляющая электрического поля  $\mathbf{E}$  ортогональная  $\mathbf{v}_0$ , и  $E_0 = mc^2(1 - v_0^2/c^2)^{-1/2}$ .

## § 2. Поле, создаваемое движущейся частицей

Заряженная частица не только испытывает действие электромагнитного поля, но и сама по себе создает электромагнитное поле. Векторный и скалярный потенциалы этого поля удовлетворяют уравнениям (см., например [1])

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi &= -\frac{4\pi}{c} \rho_e, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{j}_e$  и  $\rho_e$  — плотности тока и заряда. В случае точечной частицы, движущейся по траектории  $\mathbf{r}(t)$ ,

$$\mathbf{j} = e\mathbf{v}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)), \quad \rho_e = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)), \quad (2.2)$$

где  $\delta(\mathbf{r})$  — дельта-функция.

Электрическое и магнитное поля, порождаемые частицей, связаны с  $\mathbf{A}$  и  $\phi$  соотношениями

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} - \nabla \phi, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (2.3)$$

Физический смысл имеет решение уравнения (2.1) в виде запаздывающих потенциалов. Для точечной частицы согласно (2.1) и (2.2)

$$\mathbf{A} = e \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(\tau)|} \mathbf{v}(\tau) \delta\left(\tau - t - \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}(\tau)|\right). \quad (2.4)$$

Аналогичное решение имеет место и для скалярного потенциала. При этом в случае равномерного движения заряда

$$\mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{\sqrt{(z-vt)^2 + \rho^2\gamma^{-2}}}, \quad \phi = \frac{e}{\sqrt{(z-vt)^2 + \rho^2\gamma^{-2}}}, \quad (2.5)$$

где  $z$  — координата, параллельная скорости частицы  $\mathbf{v}$ ;  $\rho$  — радиус-вектор в плоскости, ортогональной  $\mathbf{v}$ ;  $\gamma = E/mc^2$  — лоренц-фактор частицы.

Формулы (2.5) показывают, что эквипотенциальные поверхности равномерно движущегося заряда представляют собой эллипсоид, сплюснутый в направлении движения частицы.

Определим теперь поле, порождаемое частицей в том случае, когда ее скорость резко меняется от значения  $v_0$  к значению  $v_1$  в момент времени  $t=0$ . С этой целью предварительно запишем запаздывающий потенциал (2.4) в виде фурье-разложения:

$$A = -\frac{e}{2\pi^2} \operatorname{Im} \int \frac{d^3k}{k} e^{i(ckt - \mathbf{k}\mathbf{r})} \int_{-\infty}^t d\tau v(\tau) e^{-i(ck\tau - \mathbf{k}\mathbf{r}(\tau))}. \quad (2.6)$$

Тогда в интересующем нас случае при  $t < 0$

$$A = A_0 = \frac{e}{2\pi^2 c} \operatorname{Re} \int \frac{d^3k}{k} \frac{v_0}{k - \mathbf{k}v_0 c^{-1}} e^{i(ckt - \mathbf{k}\mathbf{r})}. \quad (2.7)$$

Это выражение для  $A$  представляет собой фурье-разложение (2.5) собственного поля равномерно движущейся частицы.

При  $t > 0$ , т. е. после рассеяния частицы, как легко проверить,

$$A = \frac{e}{2\pi^2} \operatorname{Re} \int \frac{d^3k}{k} \left\{ \frac{v_1}{ck - \mathbf{k}v_1} [1 - e^{-i(ck - \mathbf{k}v_1)t}] e^{-i\mathbf{k}v_1 t} + \frac{v_0}{ck - \mathbf{k}v_0} e^{-ickt} \right\}. \quad (2.8)$$

Выполнив в (2.8) интегрирование по  $\mathbf{k}$ , находим, что при  $t > 0$

$$A = \Theta(r - ct) A_0 + \Theta(ct - r) A_1, \quad (2.8a)$$

где  $A_1$  — векторный потенциал поля частицы, равномерно движущейся со скоростью  $v_1$ , и  $\Theta(x)$  — ступенчатая функция Хевисайда:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Формулы (2.7) и (2.8) показывают, что до рассеяния (т. е. при  $t < 0$ ) окружающее электрон электромагнитное поле представляет собой кулоновское поле, движущееся вместе с электроном со скоростью  $v_0$ . Основной вклад в это поле вносят фурье-компоненты с волновыми векторами  $\mathbf{k}$ , направления которых близки к направлению скорости частицы  $v_0$ ; а именно, угол между эффективными значениями  $\mathbf{k}$  и  $v_0$  по порядку величины равен  $mc^2/E$ . После рассеяния ( $t > 0$ ) кулоновское поле «срывается» с электрона и продолжает двигаться со скоростью  $v_0$  в направлении начального движения частицы, постепенно перестраиваясь в поле излучения. Это значит (как показывает функция  $\Theta(r - ct)$ ) в первом слагаемом в формуле

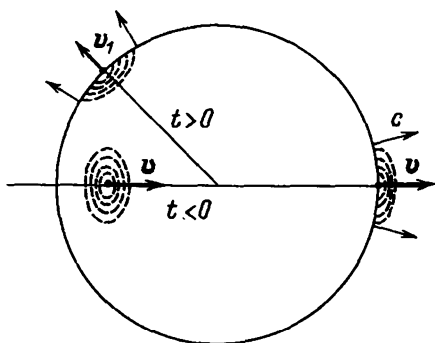


Рис. 1.1. Эволюция во времени окружающего быстрый электрон поля при рассеянии на атоме

У рассеянного электрона связанное с ним кулоновское поле появляется не сразу. Согласно (2.8), в течение интервала времени  $\Delta t \lesssim (ck - kv_1)^{-1}$  фурье-компоненты потенциала  $A$ , обладающие волновым вектором  $\mathbf{k}$ , практически отсутствуют. Так как основной вклад в потенциал  $A_1$  вносят волновые векторы  $\mathbf{k}$ , направления которых близки к направлению скорости  $\mathbf{v}_1$ , то интервал времени, в течение которого практически отсутствуют фурье-компоненты кулоновского поля рассеянного электрона, будет масштаба  $\Delta t \sim 2E^2/m^2c^3k$ . Обратно выражаясь, можно сказать, что после рассеяния электрон в течение этого времени находится в «полуголом» состоянии, т. е. в значительной степени без своего поля. Понятие «полуголый электрон» было введено в работе Фейнберга [2] при изучении эволюции во времени вектор-состояния системы «электрон плюс фотон» после рассеяния быстрого электрона на атоме на большой угол. Классическая теория эффекта была дана в работах [3—6].

### § 3. Интенсивность излучения

В предыдущем параграфе мы видели, что при резком изменении скорости электрона происходит излучение электромагнитных волн. Излучение имеет место всегда, если заряд движется с ускорением\*). Полная потеря энергии частицей на излучение при этом определяется известной формулой [1]

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{2e^2}{3c^3} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\dot{\mathbf{v}}^2 - \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}]^2}{(1 - v^2/c^2)^3}, \quad (3.1)$$

\*) Данное утверждение справедливо, если частица является точечной. В противном же случае могут быть выполнены условия, при которых заряд, движущийся с ускорением, не излучает электромагнитных волн (см. работы [7—10] и ссылки в них).

(2.8a)), что в области  $r > ct$ , до которой не успел дойти сигнал о рассеянии, поле будет кулоновским несмотря на то, что электрона в точке  $z = vt$  нет — он движется после рассеяния в направлении  $\mathbf{v}_1$  (рис. 1.1). При  $r < ct$  в (2.8a) присутствует только второе слагаемое, представляющее кулоновское поле частицы, движущейся в направлении  $\mathbf{v}_1$ . Таким образом, при  $r = ct$  имеет место перестройка поля электрона, в результате которой и происходит излучение.

а спектрально-угловая плотность излучения — формулой

$$\frac{d^3 \mathcal{E}}{d\omega d\sigma} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} [\mathbf{k}, \mathbf{I}]^2, \quad \mathbf{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \mathbf{v}(t) e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}(t))}, \quad (3.2)$$

где  $\mathbf{k}$  и  $\omega$  — волновой вектор и частота излученной волны (здесь предполагается, что  $\omega = c|\mathbf{k}|$ ),  $\mathbf{r}(t)$  — траектория частицы,  $d\sigma$  — элемент телесного угла в направлении излучения.

Выполнив в (3.2) интегрирование по телесному углу, получим спектральное распределение излучения

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{e^2 \omega}{\pi c^2} \int dt_1 dt_2 e^{i\omega(t_1 - t_2)} \times \\ \times \left[ \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 - \frac{c^2}{\omega^2} (\mathbf{v}_1 \nabla_1)(\mathbf{v}_2 \nabla_2) \right] \sin \left( \frac{\omega}{c} |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \right) / |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, \quad (3.3)$$

где

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}(t_1), \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}(t_2), \quad \nabla_1 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \quad \text{и} \quad \nabla_2 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2}.$$

Замечая, что  $\mathbf{v}_1 \nabla_1 = d/dt_1$  и  $\mathbf{v}_2 \nabla_2 = d/dt_2$ , во втором слагаемом (3.3) можно выполнить интегрирование по времени по частям. Результирующее выражение для спектра излучения мы запишем в виде

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{e^2 \omega}{\pi c^2} \int dt d\tau e^{i\omega\tau} \left[ \mathbf{v}(t) \mathbf{v}(t+\tau) - c^2 \right] \frac{\sin \left( \frac{\omega}{c} |\mathbf{r}(t+\tau) - \mathbf{r}(t)| \right)}{|\mathbf{r}(t+\tau) - \mathbf{r}(t)|}, \quad (3.4)$$

где  $\tau = t_1 - t_2$  и  $t = t_2$ .

При высоких энергиях отклонение траектории частицы от прямолинейной мало, поэтому в (3.4) может быть выполнено разложение по этому отклонению. Воспользовавшись малостью угла рассеяния частицы на интервале времени  $(t, t+\tau)$ , находим, что

$$\mathbf{v}(t+\tau) \approx \mathbf{v} \left[ 1 - \frac{1}{2c^2} \mathbf{v}_*^2(\tau) \right] + \mathbf{v}_*(\tau), \quad (3.5)$$

где  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_* = 0$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$  и  $v_* \ll v$ . Звездочка у вектора  $\mathbf{v}_*$  означает, что компоненты  $\mathbf{v}_*$  относятся к плоскости, ортогональной  $\mathbf{v}$ . Положение этой плоскости, вообще говоря, изменяется со временем (рис. 1.2). При этом очевидно, что

$$1 - c^{-2} \mathbf{v}(t) \mathbf{v}(t+\tau) \approx \\ \approx \gamma^{-2} + \frac{1}{2c^2} \mathbf{v}_*^2(\tau),$$

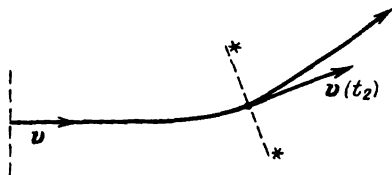


Рис. 1.2. Положение плоскости \*, определяющей компоненты вектора  $\mathbf{v}$ . в формуле (3.5)

$$|\mathbf{r}(t+\tau) - \mathbf{r}(t)| \approx v\tau - \frac{1}{2c} \int_0^\tau dt v_*^2(t) + \frac{1}{2c\tau} \mathbf{r}_*^2,$$

где

$$\mathbf{r}_* = \int_0^\tau dt \mathbf{v}_*(t), \quad \gamma = (1 - v^2 c^{-2})^{-1/2}.$$

Используя эти формулы, находим [11, 12]

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \approx -\frac{e^2 \omega}{\pi c \gamma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau} e^{i\omega\tau} \times \\ \times \left[ 1 + \frac{1}{2c^2} \gamma^2 v_*^2(\tau) \right] \sin k \left[ v\tau - \frac{1}{2c} \int_0^\tau dt v_*^2(t) + \frac{1}{2c\tau} \mathbf{r}_*^2 \right]. \quad (3.6)$$

Компоненты вектора  $\mathbf{v}_*$  можно выразить при малых углах рассеяния через компоненты вектора  $\mathbf{v}_\perp(t)$ , представляющего собой проекцию скорости частицы на плоскость, ортогональную скорости падающей частицы  $\mathbf{v}_0$  (положение этой плоскости фиксировано во времени в отличие от плоскости \*—см. рис. 1.2):

$$\mathbf{v}_*(\tau) \approx \mathbf{v}_\perp(t+\tau) - \mathbf{v}_\perp(t). \quad (3.7)$$

При малых углах рассеяния и излучения формула (3.2) может быть представлена также в виде

$$\frac{d^3 \mathcal{E}}{d\omega d\sigma} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^3} |\mathbf{I}_\perp - \mathbf{n}_\perp I_\parallel|^2, \quad (3.8)$$

где  $\mathbf{I}_\perp$  и  $I_\parallel$ —компоненты вектора  $\mathbf{I}$ , ортогональные и параллельная  $\mathbf{v}_0$ ;  $\mathbf{n}_\perp$ —проекция вектора  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$  на плоскость, ортогональную  $\mathbf{v}_0$ .

Приведенные выше формулы относились к случаю, когда заряженная частица движется в заданном поле в вакууме. Если заряд движется в среде, то она оказывает влияние на поле, создаваемое зарядом, а следовательно, и на его излучение. Свойства среды в простейшем случае отсутствия пространственной дисперсии описываются диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon(\omega)$ , зависящей от частоты  $\omega$  (см. например, [13]). Эта величина входит в соотношение  $ck = \omega \sqrt{\varepsilon}$ , связывающее волновой вектор  $\mathbf{k}$  и частоту  $\omega$  излученной волны. Спектрально-угловая плотность излучения в среде определяется формулой

$$\frac{d^3 \mathcal{E}}{d\omega d\sigma} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left\| \left[ \mathbf{k}, \int_{-\infty}^{+\infty} dt \mathbf{v}(t) e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}(t))} \right] \right\|^2. \quad (3.9)$$

Здесь не учитываются тензорные свойства диэлектрической проницаемости и считается, что магнитная проницаемость среды равна единице.

При высоких энергиях спектральная плотность излучения частицы в веществе имеет следующий вид:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = -\frac{e^2 k}{\pi} \int dt \int \frac{d\tau}{\tau} e^{i\omega\tau} \left[ \frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{2c^2} \mathbf{v}_*^2(\tau) \right] \times \\ \times \sin \left\{ k \left[ v\tau - \frac{1}{2c} \int_0^\tau dt' \mathbf{v}_*^2(t') + \frac{1}{2c\tau} \mathbf{r}_*^2(\tau) \right] \right\}. \quad (3.10)$$

Заметим, что согласно формуле (3.1) интенсивность излучения пропорциональна квадрату ускорения частицы. Отсюда следует, что равномерно движущийся в вакууме электрический заряд не излучает электромагнитных волн.

Ситуация коренным образом изменяется, если заряд движется равномерно в среде с отличной от единицы диэлектрической проницаемостью. В этом случае заряд будет излучать волны, распространяющиеся по конусу с осью вдоль скорости частицы  $v$ , причем угол раствора конуса будет равен

$$\theta = \arccos \left( \frac{c}{v\sqrt{\varepsilon}} \right). \quad (3.11)$$

Действительно, если движение является равномерным, то формула (3.9) может быть представлена в виде

$$\frac{d^3\mathcal{E}}{d\omega d\sigma} = \frac{e^2 v^2}{4\pi^2 c^3} \sqrt{\varepsilon} \omega^2 \sin^2 \theta \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} e^{i\left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon} \cos \theta\right) \omega t} \right|^2, \quad (3.12)$$

где  $\theta$  — угол между скоростью частицы  $v$  и направлением волнового вектора  $\mathbf{k}$  излученной волны.

Выполнив здесь интегрирование по времени, найдем

$$\frac{d^3\mathcal{E}}{d\omega d\sigma} = \frac{e^2 v^2}{2\pi c^3} t \omega \sin^2 \theta \cdot \delta \left( 1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon} \cos \theta \right), \quad (3.13)$$

где  $t$  — интервал интегрирования по времени,  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака.

Так как значение  $v$  всегда меньше  $c$ , то при  $\varepsilon \leq 1$  выражение (3.13) обращается в нуль. Если же  $\varepsilon > 1$ , то интенсивность излучения будет отлична от нуля при выполнении условия (3.11). Иными словами, при равномерном движении частицы только в этом случае возможно излучение. Условие (3.11) означает, что для излучения необходимо, чтобы скорость частицы в веществе превосходила фазовую скорость  $c/\sqrt{\varepsilon}$  электромагнитных волн. Это излучение называется излучением

Вавилова—Черенкова [14, 15]. Оно было открыто Черенковым в 1934 г.

Выполнив в (3.13) интегрирование по углу  $\theta$ , получим спектральную плотность черенковского излучения при частоте  $\omega$ :

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = e^2 \omega t v c^{-2} \left( 1 - \frac{c^2}{\epsilon v^2} \right), \quad c < v \sqrt{\epsilon}. \quad (3.14)$$

Формула (3.14) носит название формулы Тамма—Франка. Теория эффекта Вавилова—Черенкова была развита Таммом и Франком [16].

Черенковское излучение может рассматриваться как потеря энергии равномерно движущейся частицы на излучение. Но при равномерном движении частица теряет свою энергию также на ионизацию атомов среды. По сравнению с потерей энергии на ионизацию черенковские потери, вообще говоря, малы (см. ниже, гл. 9).

#### § 4. Длина когерентности

Основной особенностью процесса излучения ультрарелятивистской частицы является то, что он разыгрывается в области больших расстояний в направлении движения. Это явление

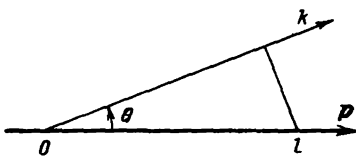


Рис. 1.3. Разность фаз электромагнитных волн, излучаемых электроном на пути  $l$

углом  $\theta$  к ее импульсу будет равна (рис. 1.3)

$$\Delta\varphi = \omega l/v - kl \cos \theta, \quad (4.1)$$

где  $l$ —путь, проходимый частицей за интервал времени  $(t, t+l/v)$ .

Определим длину  $l(\omega, \theta)$ , на которой формируется излучение частицы с частотой  $\omega$  под углом  $\theta$  к ее импульсу, как расстояние, на котором  $\Delta\varphi = 1$ , т. е. как отрезок пути, с которого все волны излучаются источником в фазе. Тогда легко видеть, что

$$l(\omega, \theta) = (\omega/v - k \cos \theta)^{-1}. \quad (4.2)$$

В среде частота  $\omega$  связана с волновым вектором излученной волны  $\mathbf{k}$  соотношением  $ck = \sqrt{\epsilon} \omega$ , поэтому длина формирования излучения  $l(\omega, \theta)$  приобретает вид

$$l(\omega, \theta) = \frac{v}{\omega} \left( 1 - \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon} \cos \theta \right)^{-1}. \quad (4.3)$$

Мы видим, что если  $v\sqrt{\epsilon}\cos\theta=c$ , то длина  $l(\omega, \theta)$  обращается в бесконечность. Частица в этом случае движется вместе с волной, находясь все время в точке с одинаковой фазой; при этом энергия частицы непрерывно переходит к волне. Этот случай соответствует черенковскому излучению при равномерном движении заряженной частицы в среде.

Такой подход к разъяснению физической сущности эффекта Вавилова—Черенкова принадлежит Франку [17] (см. также [18]). Исходным в нем является рассмотрение фазовых соотношений для волн, излучаемых частицей с различных участков пути. (Длину формирования излучения, т. е. длину, на которой излученные волны складываются и усиливают друг друга, Франк назвал зоной Френеля, по аналогии с теорией дифракции.)

Подчеркнем, что понятие длины формирования излучения имеет смысл всегда, независимо от величины  $\epsilon$ : она всегда определяет порядок величины пространственной области, для которой существенны интерференционные эффекты при излучении.

При высоких энергиях характерные значения углов излучения частицы в веществе малы по сравнению с единицей:  $\theta_{\text{eff}} \sim mc^2/E$ . В этой области углов при  $\epsilon=1$ , согласно (4.3),

$$l(\omega, \theta) = \frac{l_c}{1 + \gamma^2 \theta^2}, \quad (4.4)$$

где  $\gamma = E/mc^2$  — лоренц-фактор частицы; входящая в это выражение длина

$$l_c = \frac{2c\gamma^2}{\omega} \quad (4.5)$$

определяет порядок величины пространственной области вдоль импульса частицы, в пределах которой проявляются интерференционные эффекты при излучении. Эта величина носит название длины когерентности [19, 20] (причина этого названия будет разъяснена ниже, в § 13).

Значение  $l_c$  быстро растет с ростом энергии частицы  $E$  и с уменьшением частоты излученной волны  $\omega$ , и при достаточно больших  $E$  и малых  $\omega$  она может достигать макроскопических размеров. По этой причине не всегда при исследовании процесса излучения можно ограничиваться учетом взаимодействия электрона с одной заряженной частицей, в частности, с одним заряженным ядром. Это значит, что если  $l_c$  больше размера атома, то необходим учет взаимодействия падающего электрона не только с атомным ядром, но и с атомными электронами. Это взаимодействие учитывается как эффект экранирования в теории тормозного излучения Бете и Гайтлера [21, 22]. Если же  $l_c$  превосходит среднее расстояние между атомами среды, то необходим учет влияния



как атомных электронов, так и многих атомов на процесс излучения [23—25].

При получении выражения (4.3) для пути формирования излучения предполагалось, что траектория частицы в веществе представляет собой прямую линию или мало отличается от нее. Можно легко учесть также и изменение направления траектории, обусловленное столкновениями (упругими) частицы с атомами среды. Для этого нужно только в формуле (4.3) заменить  $v$  на  $v_{\parallel} = v \cos \vartheta_1$ , где  $\vartheta_1$  — угол многократного рассеяния частицы на длине когерентности (черта означает среднее значение величины  $\cos \vartheta_1$ ). Тогда мы приходим к следующему выражению для длины формирования излучения, полученному в работе Галицкого и Гуревича [26]:

$$l(\omega, \theta) = \frac{\overline{v \cos \vartheta_1}}{\omega - kv \cdot \overline{\cos \vartheta_1} \cdot \cos \theta}. \quad (4.6)$$

Заметим, что среднее значение  $\overline{\cos \vartheta_1}$  в веществе само по себе зависит от длины формирования излучения, поэтому формула (4.6) представляет собой в действительности уравнение для определения  $l(\omega, \theta)$ .

Учитывая малость характерных углов рассеяния и излучения релятивистской частицы в веществе, находим, что при  $\varepsilon = 1$

$$l(\omega, \theta) = \frac{l_c}{1 + \gamma^2 \theta^2 + \gamma^2 \overline{\vartheta_1^2}}. \quad (4.7)$$

Из этого соотношения вытекает, что если на длине когерентности выполняется условие  $\gamma^2 \overline{\vartheta_1^2} \ll 1$ , то формула (4.7) переходит в формулу (4.4), причем такой переход осуществляется независимо от того, в какой среде происходит излучение (в аморфной или кристаллической). Это означает, что сама по себе длина когерентности еще не определяет динамики процесса излучения. Иными словами, основываясь только на выражении для  $l(\omega, \theta)$ , мы не можем сказать, приводит ли интерференция в пределах длины когерентности к усилению или ослаблению интенсивности излучения. В частности, при равномерном движении частицы формула (4.4) сама по себе тоже имеет смысл, хотя в этом случае при  $\varepsilon = 1$  никакого излучения нет.

С ростом энергии частицы  $E$  и с уменьшением частоты  $\omega$  излученной волны значение  $l(\omega, \theta)$  растет. Растут при этом и средние значения  $\overline{\vartheta_1^2}$ . Поэтому с ростом  $l(\omega, \theta)$  условие  $\gamma^2 \overline{\vartheta_1^2} \ll 1$  будет нарушаться.

Формула (4.7) показывает, что при  $\gamma^2 \overline{\vartheta_1^2} \gg 1$  длина формирования излучения будет уменьшаться по сравнению с длиной, определяемой формулой (4.4). Подчеркнем, что этот результат свидетельствует только о том, что при  $\gamma^2 \overline{\vartheta_1^2} \gg 1$  уменьшается

размер пространственной области, в пределах которой существенны интерференционные эффекты при излучении, но по-прежнему, основываясь только на величине  $l(\omega, \theta)$ , нельзя сказать, как развивается процесс излучения в пределах длины когерентности.

### § 5. Излучение при различных соотношениях между углами рассеяния и излучения релятивистской частицы

При равномерном движении заряженной частицы в вакууме излучение отсутствует. Для излучения необходимо, чтобы траектория отличалась от прямой. Мы рассмотрим прежде всего здесь случай, когда траектория мало отличается от прямой. Будем сперва предполагать, что угол рассеяния частицы на длине когерентности  $\vartheta_l$  мал по сравнению с характерным углом излучения релятивистской частицы  $\theta_{\text{eff}} \sim \gamma^{-1}$ :

$$\gamma \vartheta_l \ll 1. \quad (5.1)$$

Тогда в формуле (3.8) может быть выполнено разложение по углу рассеяния. В первом приближении такого разложения спектральная плотность излучения имеет вид

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{e^2 \omega}{2\pi c^4} \int_{\delta}^{+\infty} \frac{dq}{q^2} \left[ 1 - 2 \frac{\delta}{q} \left( 1 - \frac{\delta}{q} \right) \right] |\mathbf{W}(q)|^2, \quad (5.2)$$

где

$$\delta = \frac{\omega}{2c\gamma^2} \quad \mathbf{W}(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \dot{\mathbf{v}}_{\perp} e^{iqt}. \quad (5.3)$$

Входящая сюда величина  $q$  связана с углом  $\theta$ , под которым происходит излучение, соотношением  $q = \frac{\omega}{c} (1 - \mathbf{nv}c^{-1})$ , поэтому интегрирование по  $q$  в (5.2) фактически соответствует интегрированию по углам излучения.

Мы видим, что при выполнении условия (5.1) спектральная плотность излучения определяется только фурье-компонентой ускорения частицы. При этом поперечное смещение излучающей частицы на длине когерентности  $\Delta x \sim \vartheta_l c$  мало по сравнению с длиной излученной волны  $\lambda = c/\omega$ . По этим причинам можно сказать, что формула (5.2) соответствует дипольному приближению [27].

Сравнительно простые формулы могут быть получены также в случае, когда выполняется условие малости изменения кривизны траектории частицы по сравнению с самим радиусом кривизны в пределах длины когерентности. Последнее условие означает, что длина  $l = v\Delta t$ , на которой формируется излучение,

должна быть мала по сравнению с длиной  $\Delta s$ , на которой существенно изменяется внешнее поле. Иными словами, внешнее поле в пределах длины когерентности должно быть близко к однородному. По этой причине рассматриваемое приближение можно назвать приближением однородного поля.

При выполнении условия  $l \ll \Delta s$  компоненты вектора  $\mathbf{v}_*$  мало изменяются на интервале времени  $\Delta t$ , дающем главный вклад в интеграл по  $\tau$  в (3.6), поэтому согласно (3.7), имеем

$$\mathbf{v}_*(\tau) \approx \tau \dot{\mathbf{v}}_* \approx \tau \dot{\mathbf{v}}_{\perp}(t).$$

Используя это соотношение, можно представить (3.6) в виде

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = -\frac{2e^2\omega}{\sqrt{\pi c}\gamma^2} T \left[ \frac{1}{u} \Phi'(u) + \frac{1}{2} \int_u^{+\infty} dx \Phi(x) \right], \quad (5.4)$$

где  $u = (\omega c \gamma^{-3} |\dot{\mathbf{v}}_{\perp}|^{-1})^{2/3}$  и  $\Phi(u)$  — функция Эйри:

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} d\xi \cos \left( u\xi + \frac{1}{3}\xi^3 \right). \quad (5.5)$$

Переменная  $\xi$  здесь связана с переменной  $\tau$ , входящей в (3.6), соотношением  $2\xi = \tau (c^{-2}\omega \dot{\mathbf{v}}_{\perp}^2)^{1/3}$ .

Основной вклад в функцию Эйри вносят значения  $\xi \sim 1$ , если  $u \lesssim 1$  и  $\xi \sim \sqrt{u}$ , если  $u \gg 1$ . Определяя отсюда интервал времени  $\Delta t$ , за который формируется излучение, запишем неравенство  $v\Delta t \ll \Delta s$  в виде

$$\gamma \vartheta(\Delta s) \min(1, \sqrt{u}) \gg 1, \quad (5.6)$$

где  $\vartheta(\Delta s) = \dot{\mathbf{v}}_{\perp} v^{-2} \cdot (\Delta s)$  — угол рассеяния на интервале времени  $\Delta t = \Delta s/v$ . Таким образом, формула (5.4) справедлива, если угол рассеяния частицы на длине  $\Delta s$  много больше характерного угла излучения релятивистской частицы  $\theta_{\text{eff}} \sim \gamma^{-1}$ .

Это условие, в частности, выполняется при движении частицы в постоянном и однородном магнитном поле, когда радиус кривизны траектории вообще не изменяется. Так, при движении по окружности в магнитном поле с напряженностью  $H$  радиус окружности, как известно [1], равен

$$\mathcal{R}_H = m\gamma/eH. \quad (5.7)$$

Ускорение в этом случае направлено по радиусу к центру окружности и определяется формулой  $\dot{\mathbf{v}} = eH/E$ . При этом угол рассеяния частицы на интервале времени  $(0, \tau)$ , малом по сравнению с периодом ее вращения по окружности, равен  $\vartheta(\tau) = eH\tau/E$ . Подставляя это соотношение в формулу (3.6), получим следующее выражение для спектральной плотности излучения:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{\sqrt{3} e^3 H T}{2\pi m} F \left( \frac{\omega}{\omega_H} \right), \quad (5.8)$$

где

$$\omega_H = 3eH\gamma^2/2m, \quad F(\xi) = \xi \int_{\xi}^{\infty} dx K_{5/3}(x).$$

Здесь

$$K_{5/3}(x) = 2\sqrt{3\pi} \frac{d}{dx} \left[ \frac{\Phi'(u)}{u} + \frac{1}{2} \int_u^{\infty} dy \Phi(y) \right], \quad (5.9)$$

где  $\Phi(x)$  — функция Эйри и  $u = (3/2x)^{2/3}$ .

Излучение в этом случае носит название синхротронного излучения. (Теории этого излучения посвящено большое число работ — см. обзоры [1, 28—32].)

На рис. 1.4 представлен график функции  $F(\xi)$ . Приведенные результаты показывают, что спектр синхротронного излучения содержит максимум в области частот  $\omega \approx 1/3 \omega_H$  и что в области этого максимума спектральная плотность излучения по порядку величины равна

$$\frac{1}{T} \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \sim \frac{e^2 \gamma}{\mathcal{R}_H}. \quad (5.10)$$

Отметим, что длина когерентности в области максимума синхротронного излучения  $l_c = 2\gamma^2 c / \omega_H \approx 4m/3eH$  мала по сравнению с радиусом кривизны траектории частицы (5.7).

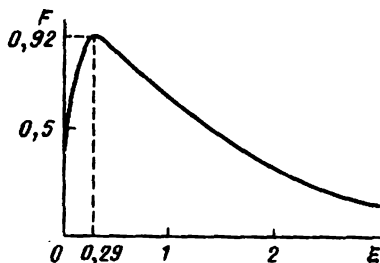


Рис. 1.4. График функции  $F(\xi)$ , определяющий спектр синхротронного излучения

## § 6. Ондюляторное излучение

Рассмотрим теперь излучение в том случае, когда на частицу действует периодическая в пространстве и времени сила в направлении, перпендикулярном начальному движению частицы (рис. 1.5). Такое движение называется ондуляторным. Частным примером ондуляторного движения является движение по винтовой линии, ось которого направлена вдоль начальной скорости. В общем случае при ондуляторном движении как поперечная, так и продольная составляющие скорости частицы будут периодическими функциями времени. Сама траектория при этом будет удовлетворять соотношениям

$$\mathbf{r}_{\parallel}(t+T) = v_{\parallel}T + \mathbf{r}_{\parallel}(t), \quad \mathbf{r}_{\perp}(t+T) = \mathbf{r}_{\perp}(t), \quad (6.1)$$

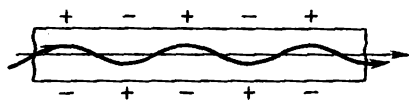


Рис. 1.5. Движение быстрой заряженной частицы в электрическом ондуляторе

где  $T$  — период колебания,  $v_{\parallel}$  — средняя скорость поступательного движения частицы

$$v_{\parallel} = \frac{1}{T} \int_0^T dt v(t), \quad (6.2)$$

$r_{\parallel}(t)$  и  $r_{\perp}(t)$  — составляющие радиус-вектора траектории частицы  $\mathbf{r}(t)$  вдоль и поперек  $v_{\parallel}$ .

Для того чтобы найти спектр излучения при ондуляторном движении, необходимо подставить формулы (6.1) в соотношение (3.8). После  $N$  колебаний частицы в ондуляторе спектральная плотность излучения будет равна

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^3} \int d\sigma \left( \frac{\sin(NcqT/2)}{\sin(cqT/2)} \right)^2 \left| \mathbf{I}'_{\perp} - \mathbf{n}_{\perp} I'_{\parallel} \right|^2, \quad (6.3)$$

где

$$q = \frac{\omega}{c} (1 - \mathbf{n} v_{\parallel} c^{-1}),$$

$$\{I'_{\parallel}; \mathbf{I}'_{\perp}\} = \int_0^T dt \{c; \mathbf{v}_{\perp}(t)\} \exp \left[ i \frac{\omega}{c} (ct - \mathbf{n} \mathbf{r}(t)) \right].$$

Если  $N \gg 1$ , то

$$\left( \frac{\sin NcqT/2}{\sin cqT/2} \right)^2 \rightarrow N \frac{2\pi}{cT} \sum_{\nu} \delta(q - \nu), \quad (6.4)$$

где  $\nu = 2\pi n/Tc$  и  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . При этом формула (6.3) приобретает вид

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = N \frac{e^2 \omega}{2\pi T c^3} \sum_{\nu \geq (1 + c^{-2} \gamma^2 \bar{v}_{\perp}^2) \delta}^{2\pi} d\varphi \left| \mathbf{I}'_{\perp} - \mathbf{n}_{\perp} I'_{\parallel} \right|^2. \quad (6.5)$$

Здесь  $\delta = \omega/2c\gamma^2$ ;  $\varphi$  — азимутальный угол (в ортогональной  $v_{\parallel}$  плоскости) вектора  $\mathbf{n}$ , определяющего направление излучения; и  $\bar{v}_{\perp}^2$  — среднее значение квадрата поперечной компоненты скорости частицы  $\mathbf{v}_{\perp}(t)$ . Так как

$$q = \frac{\omega}{c^2} (c - \mathbf{n} v_{\parallel}), \text{ то } \nu = (1 + c^{-2} \gamma^2 \bar{v}_{\perp}^2 + \gamma^2 \theta^2) \delta$$

определяет значение угла  $\theta$ , под которым происходит излучение.

В дипольном приближении, когда выполняется условие  $c^{-2} \gamma^2 \bar{v}_{\perp}^2 \ll 1$ , имеем

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = N \frac{e^2 \omega}{T c^5} \sum_{\nu \geq \delta} \nu^{-2} \left[ 1 - 2 \frac{\delta}{\nu} \left( 1 - \frac{\delta}{\nu} \right) \right] \left| \mathbf{W}'(\nu) \right|^2, \quad (6.6)$$

где

$$W'(v) = \int_0^T dt \dot{v}_\perp(t) \exp(ivct).$$

Формула (6.5) показывает, что спектр излучения быстрой частицы в ондуляторе содержит резкие максимумы на частотах, кратных частоте

$$\omega = \frac{2\gamma^2}{1 + c^{-2}\gamma^2 v_\perp^2} \frac{2\pi}{T}. \quad (6.7)$$

Возникновение этих максимумов связано с интерференцией волн, излучаемых частицей с периодически повторяющихся участков пути, и соответствует частотам, для которых длина когерентности сравнима с длиной  $v_{||}T$ , проходимой частицей за период одного колебания. Отметим, что для релятивистских частиц максимум ондуляторного излучения (6.7) соответствует частоте, которая по порядку величины в  $2\gamma^2$  раз превосходит частоту ( $2\pi/T$ ) действия на частицу внешнего поля.

Таким образом, ондулятор можно рассматривать как генератор электромагнитного излучения, позволяющий получить излучение существенно большей частоты по сравнению с частотой действия на частицу внешнего поля. На это впервые обратил внимание Гинзбург [33]. Теория ондуляторного излучения в дальнейшем развивалась в работах [34—38] и изложена в обзорах [18, 38—42].

В качестве ондулятора могут быть использованы также естественные кристаллы, так как при движении заряженной частицы в кристалле может быть реализовано ондуляторное движение. К этому вопросу мы вернемся ниже, в гл. 6.

Рассмотрим в качестве примера ондулятор, в котором движение быстрой заряженной частицы происходит вдоль оси  $z$ , а возмущающая сила направлена вдоль оси  $x$  и имеет вид [38]

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}], \quad \mathbf{H} = -\hat{\mathbf{J}} H \sin \frac{z}{\lambda}, \quad (6.8)$$

где  $\hat{\mathbf{J}}$  — единичный вектор в направлении оси  $y$ . Движение частицы в этом случае происходит в гармонически изменяющемся вдоль оси ондулятора (оси  $z$ ) магнитном поле напряженности  $\mathbf{H}$  ( $\lambda$  — длина, на которой периодически изменяется магнитное поле вдоль оси  $z$ ).

Траектория частицы в таком поле, удовлетворяющая начальным условиям  $x=y=z=0$  и  $\dot{x}=c\beta_m$  при  $t=0$ , согласно (1.6) и (1.7) определяется соотношением

$$\mathbf{r}(t) = \hat{\mathbf{i}} x_m \sin \Omega t + \hat{\mathbf{k}} [v_{||}t - (\delta z)_m \sin 2\Omega t], \quad (6.9)$$

где  $\hat{\mathbf{i}}$  и  $\hat{\mathbf{k}}$  — единичные векторы вдоль осей  $x$  и  $z$ ;  $\Omega = 2\pi/T$  — частота колебаний и  $T = \lambda/2\pi v_{||}$  — их период;  $x_m = c\beta_m/\Omega$

и  $(\delta z)_m = \Omega x_m^2 / 8v_{||}$  — максимальные значения амплитуд колебаний частицы вдоль осей  $x$  и  $z$ ;  $v_{||} = v(1 - c^2 \beta_m^2 / 4v^2)$  — среднее значение скорости вдоль оси  $z$ ;  $c\beta_m = ecH\lambda E^{-1}$ , причем  $\beta_m \ll 1$ .

Подставляя это выражение для траектории в формулу (6.5), получим спектр излучения.

При выполнении условия дипольности излучения  $c^{-2}\gamma^2 v_{||}^2 \ll 1$  изменением продольной составляющей скорости частицы в (6.9) можно пренебречь:

$$\mathbf{r}(t) \approx \hat{\mathbf{i}}x_m \sin \Omega t + \hat{\mathbf{k}}v_{||}t. \quad (6.9a)$$

При этом согласно (6.6) спектральная плотность излучения будет равна

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \begin{cases} N \frac{\pi}{2c^3} e^2 x_m^2 \Omega \omega \left[ 1 - 2 \frac{c\delta}{\Omega} \left( 1 - \frac{c\delta}{\Omega} \right) \right], & \Omega \geq \delta \cdot c, \\ 0, & \Omega < \delta \cdot c. \end{cases} \quad (6.10)$$

Таким образом, в дипольном приближении спектр излучения частицы, движущейся в поле (6.8), содержит один максимум при частоте  $\omega_D = 2\gamma^2\Omega$ .

Формула (6.10) справедлива, если выполняется условие  $\gamma\beta_m \ll 1$ . С ростом значений  $H$  и  $\lambda$  это неравенство нарушается. При этом нельзя пользоваться формулами дипольного приближения, и спектр излучения необходимо определять по общей формуле (6.5). В общем случае вычислить входящие в эту формулу интегралы в аналитическом виде не удастся, поэтому нахождение спектра излучения может быть проведено с помощью численных расчетов на ЭВМ (для нахождения  $d\mathcal{E}/d\omega$  необходимо вычислить двойной интеграл по времени и по азимутальному углу  $\varphi$  и выполнить в (6.5) суммирование по  $\nu$ ).

На рис. 1.6 представлены результаты вычислений спектров ондуляторного излучения в случаях, когда параметр недиполь-

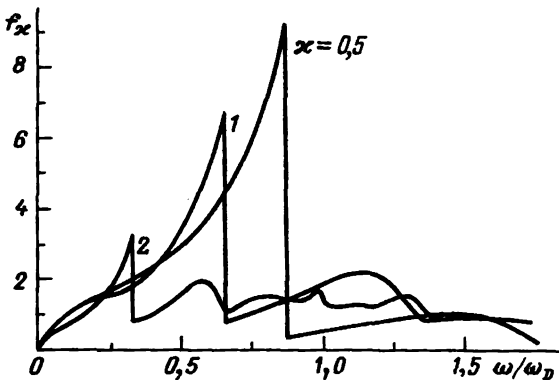


Рис. 1.6. Спектральная плотность ондуляторного излучения при различных значениях параметра недипольности излучения

ности  $\kappa = \gamma\beta_m$  соответственно равен 0,5; 1 и 2. По оси ординат на этом рисунке отложена функция  $f_\kappa$ , связанная с  $d\mathcal{E}/d\omega$  соотношением  $c d\mathcal{E}/d\omega = 8Ne^2\kappa^2\pi^{-3}f_\kappa$ .

Из соотношения (6.7) следует, что с учетом недипольности при движении частицы по траектории вида (6.9) первый максимум спектра излучения соответствует частоте

$$\omega_m = \omega_D / (1 + 1/2\kappa^2), \quad (6.11)$$

где  $\omega_D = 2\gamma^2\Omega$  — положение максимума в дипольном приближении. Таким образом, учет недипольности излучения приводит к смещению положения максимума ондуляторного излучения в область более низких частот чем частота  $\omega_D$ .

Представленные на рис. 1.6 графики показывают, что при  $\omega < \omega_m$  в рассматриваемой области  $\kappa$  дипольное приближение и точная формула дают близкие результаты для интенсивности излучения независимо от величины параметра  $\kappa$ . Связано это с тем, что параметр недипольности  $\kappa$  входит в спектр излучения (6.5) в виде комбинации  $(\omega\kappa^2/2\omega_D)$ , поэтому в области малых частот ( $\omega \ll \omega_D$ ) эта величина будет мала независимо от значения  $\kappa$  [12].

Действительно, подставляя (6.9) в (3.6) и замечая, что

$$\gamma v_*(\tau) = \gamma [v_\perp(t+\tau) - v_\perp(t)] = -2\kappa \sin \frac{\xi}{2} \cos \left( \eta + \frac{\xi}{2} \right),$$

где  $\xi = \Omega\tau$  и  $\eta = \Omega t$ , получим после интегрирования по  $\eta$

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = 4Ne^2\zeta \left\{ \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi} \left[ \left( 1 + \kappa^2 \sin^2 \frac{\xi}{2} \right) (\sin C) J_0(D) - \kappa^2 \left( \sin^2 \frac{\xi}{2} \right) (\cos C) J_1(D) \right] - \frac{\pi}{2} \right\}, \quad (6.12)$$

где  $J_0(D)$  и  $J_1(D)$  — функции Бесселя,  $\zeta = \omega/\omega_D$ ,

$$C = \zeta \left[ \left( 1 + \frac{\kappa^2}{2} \right) \xi - 2\kappa^2 \frac{\sin^2(\xi/2)}{\xi} \right], \quad D = \frac{1}{2} \zeta \kappa^2 \left[ \sin \xi - \frac{4 \sin^2(\xi/2)}{\xi} \right].$$

Формула (6.12) справедлива при любых частотах. Она непосредственно показывает, что  $\kappa$  входит в спектр излучения в виде комбинации  $1/2\zeta\kappa^2$ .

В первом приближении по параметру  $1/2\zeta\kappa^2$  спектр излучения (6.12) приобретает вид

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = N \frac{e^2}{c} \pi \kappa^2 \zeta (1 - 2\zeta + 2\zeta^2) \Theta \left( 1 - \zeta \left( 1 + \frac{1}{2}\kappa^2 \right) \right), \quad (6.13)$$

где  $\Theta(x)$  — ступенчатая функция Хевисайда.



Эта простая формула хорошо описывает спектр излучения в области частот  $\omega \lesssim \omega_m$ . При  $\omega > \omega_m$  в дипольном приближении спектральная плотность излучения (6.10) равна нулю, тогда как учет недипольности излучения (см. рис. 1.6) приводит к отличной от нуля спектральной плотности излучения.

## § 7. Излучение при резком изменении траектории частицы

Общая формула для интенсивности излучения (3.1) существенно упрощается, если в пределах длины когерентности происходит резкое изменение траектории частицы, т. е. если выполняется условие

$$l_c \gg v \Delta t, \quad (7.1)$$

где  $\Delta t$  — интервал времени, в течение которого на быструю частицу действует внешнее поле.

Действительно, выполним во входящей в (3.2) величине  $\mathbf{I}$  интегрирование по  $t$  по частям:

$$\mathbf{I} = \frac{ic}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega(t-c^{-1}\mathbf{nr}(t))} \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{v}(t)}{c - \mathbf{nv}(t)}. \quad (7.2)$$

Подынтегральное выражение здесь отлично от нуля в интервале времени  $\Delta t$ , на котором на частицу действует внешнее поле. При выполнении условия (7.1) аргумент экспоненты в (7.2) на интервале времени  $\Delta t$  мал по сравнению с единицей, поэтому экспонента может быть заменена единицей:

$$\mathbf{I} = \frac{ic}{\omega} \left( \frac{\mathbf{v}'}{c - \mathbf{nv}'} - \frac{\mathbf{v}}{c - \mathbf{nv}} \right), \quad (7.3)$$

где  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}'$  — скорости до и после рассеяния. Подставив это выражение в (3.2), получим после интегрирования по телесному углу следующую формулу для спектральной плотности излучения:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{2e^2}{\pi c} \left\{ \frac{2\xi^2 + 1}{\xi \sqrt{\xi^2 + 1}} \ln(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}) - 1 \right\}, \quad (7.4)$$

где  $\xi = \gamma \vartheta / 2$  и  $\vartheta = |\mathbf{v}' - \mathbf{v}| / v$  — угол рассеяния ( $\vartheta \ll 1$ ).

Таким образом, при выполнении условия (7.1) спектральная плотность излучения определяется только углом рассеяния частицы  $\vartheta$  и ее лоренц-фактором  $\gamma$ .

Условие  $l_c \gg v \Delta t$  выполняется, в частности, при столкновении быстрой частицы с атомом, потенциал которого представляет собой экранированный потенциал Кулона

$$u(r) = \frac{Z|e|}{r} \exp\left(-\frac{r}{R}\right), \quad (7.5)$$

где  $Z|e|$  — заряд ядра атома и  $R$  — радиус экранировки атома (в модели Томаса — Ферми  $R^{-1} = me^2 Z^{1/3}$ ). Действительно, в этом случае  $\Delta t \sim R/v$ , поэтому при достаточно больших энергиях условие  $l_c \gg R$  всегда может быть выполнено.

Угол рассеяния быстрой частицы при столкновении с атомом определяется согласно (1.7) прицельным параметром  $\rho$ :

$$\vartheta(\rho) = -\frac{e}{E} \frac{d}{d\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} dz u(r) = \frac{2Ze|e|}{ER} K_1\left(\frac{\rho}{R}\right), \quad (7.6)$$

где  $K_1(x)$  — модифицированная функция Ханкеля. В задачах об излучении при столкновениях обычно приходится рассматривать рассеяние пучка параллельно движущихся частиц, поэтому задача состоит в определении излучения, отнесенного к единице плотности потока частиц. Если плотность потока частиц в пучке равна единице, то число частиц в пучке, имеющих прицельное расстояние между  $\rho$  и  $\rho + d^2\rho$ , равно  $d^2\rho$ . Поэтому искомое излучение получится умножением спектральной плотности излучения одной частицы на  $d^2\rho$  и интегрированием полученного выражения по  $\rho$ . Определенная таким образом величина  $d\mathcal{X}/d\omega$  носит название эффективного излучения [1]

$$\frac{d\mathcal{X}}{d\omega} = \int d^2\rho \frac{d\mathcal{E}(\vartheta(\rho))}{d\omega}. \quad (7.7)$$

Подставляя в эту формулу значение (7.6) угла рассеяния частицы в поле (7.5), получим с точностью до членов порядка  $Ze^2/mR$

$$\frac{d\mathcal{X}}{d\omega} = \frac{16Z^2e^6}{3m^2c^5} \left[ \left( \ln \frac{mR}{Ze^2} - G + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{12} \right], \quad (7.8)$$

где  $G \approx 0,577$  — постоянная Эйлера.

## § 8. Излучение в случае многих столкновений электрона на длине когерентности

Длина когерентности  $l_c$  при высоких энергиях может достигать макроскопических размеров. На этой длине может произойти большое число столкновений электрона с атомами, поэтому возникает вопрос о том, как будет развиваться процесс излучения в этом случае. Рассмотрим, прежде всего, случай двух столкновений [6].

Если при  $t=t_1=0$  в результате столкновения с атомом скорость электрона меняется от значения  $v$  к значению  $v_1$ , а при  $t=t_2$  она испытывает изменение от  $v_1$  к  $v_2$ , то согласно

(2.6) векторный потенциал окружающего электрон поля будет определяться при  $t > t_2$  формулой

$$\mathbf{A} = \frac{e}{2\pi^2} \operatorname{Re} \int \frac{d^3k}{k} \left\{ \frac{\mathbf{v}_2}{ck - \mathbf{v}_2\mathbf{k}} [1 - e^{-i(kc - \mathbf{k}\mathbf{v}_2)(t-t_2)}] e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)} + \right. \\ \left. + \frac{\mathbf{v}_1}{kc - \mathbf{k}\mathbf{v}_1} [e^{i(kc - \mathbf{k}\mathbf{v}_1)t_2} - 1] e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)} + \frac{\mathbf{v}}{kc - \mathbf{k}\mathbf{v}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)} \right\}. \quad (8.1)$$

Здесь  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_2 + \mathbf{v}_2(t - t_2)$ , а  $\mathbf{r}_2$  — положение точки, в которой произошло второе столкновение.

Слагаемые в этом выражении, содержащие векторы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}_2$  имеют ту же структуру, что и соответствующие слагаемые в формуле (2.8), — они определяют эволюцию поля в направлениях начального и конечного движений частицы. Слагаемое, содержащее  $\mathbf{v}_1$ , определяет эволюцию поля в направлении промежуточного движения.

Если второе столкновение произошло в момент времени  $t_2 \ll (kc - \mathbf{k}\mathbf{v}_1)^{-1}$ , то электрон в момент столкновения находился в «полуголом» состоянии. При этом согласно (8.1) излучение волн с волновыми векторами  $\mathbf{k}$ , близкими по направлению к  $\mathbf{v}_1$ , будет подавлено по сравнению с тем случаем, когда второе столкновение происходит в момент времени  $t_2 \gtrsim (kc - \mathbf{k}\mathbf{v}_1)^{-1}$ .

Рассмотрим теперь случай, когда на длине когерентности происходит много ( $N \gg 1$ ) столкновений в моменты времени  $t = t_j > 0$ , где  $j = 1, 2, \dots, N$ . Тогда векторный потенциал (2.6) при  $t > t_j$  будет определяться формулой

$$\mathbf{A} = \frac{e}{2\pi^2} \operatorname{Re} \int \frac{d^3k}{k} \left( \frac{\mathbf{v}_N}{kc - \mathbf{k}\mathbf{v}_N} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_N(t))} - i\mathbf{I} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - ckt)} \right), \quad (8.2)$$

где

$$\mathbf{r}_N(t) = \mathbf{r}_N + \mathbf{v}_N(t - t_N), \\ \mathbf{I} = i \sum_{j=1}^N \left( \frac{\mathbf{v}_j}{kc - \mathbf{k}\mathbf{v}_j} - \frac{\mathbf{v}_{j-1}}{kc - \mathbf{k}\mathbf{v}_{j-1}} \right) e^{i(kc - \mathbf{k}\mathbf{v}_{j-1})t_j}. \quad (8.3)$$

Характерные значения углов рассеяния быстрых частиц в веществе малы, поэтому все векторы  $\mathbf{v}_j$  будут близки по направлению к вектору  $\mathbf{v}$ .

Если выполняются условия

$$(kc - \mathbf{k}\mathbf{v}_{j-1})t_j \ll 1, \quad (8.4)$$

то электрон во всех столкновениях будет находиться в «полуголом» состоянии. При этом

$$\mathbf{I} \approx i \left( \frac{\mathbf{v}_N}{kc - \mathbf{k}\mathbf{v}_N} - \frac{\mathbf{v}}{kc - \mathbf{k}\mathbf{v}} \right). \quad (8.5)$$

Мы видим, что в рассматриваемом случае величина  $I$ , определяющая окружающее электрон поле после  $N$  столкновений с атомами, зависит только от начальной и конечной скоростей частицы и не зависит от ее промежуточных скоростей.

Зная  $I$ , можно найти спектрально-угловую плотность излучения (3.2). Спектральная же плотность излучения при этом будет определяться формулой (7.4) с  $\vartheta = |\mathbf{v}_N - \mathbf{v}|/v$ .

Отметим некоторые особенности процесса излучения при выполнении условий (8.4).

Первое слагаемое (8.5) определяет волны, распространяющиеся в направлении, близком к направлению конечного движения частицы  $\mathbf{v}_N$ , а второе — волны, распространяющиеся в направлении, близком к  $\mathbf{v}$ . Излучение в основном происходит в конусы с углами растворов порядка  $\gamma^{-1}$  (рис. 1.7). Фазы

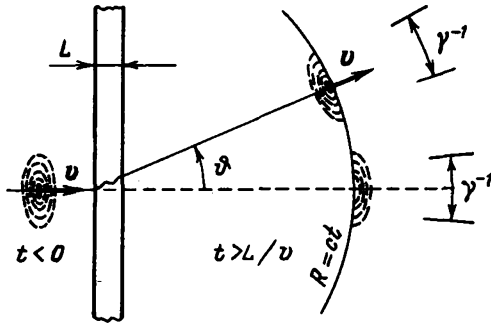


Рис. 1.7. Эволюция поля электрона в случае многих столкновений в пределах длины когерентности

волн, распространяющихся вблизи направлений  $\mathbf{v}_N$  и  $\mathbf{v}$  противоположны, поэтому при различных соотношениях между углом рассеяния  $\vartheta$  и углом раствора конуса излучения  $\sim \gamma^{-1}$  интерференционные картины будут разные.

Если  $\vartheta \ll \gamma^{-1}$ , то происходит значительное сокращение полей, связанных с обоими слагаемыми в формуле (8.5). В этом случае величина  $|I|$  пропорциональна  $\vartheta$ , а спектр излучения будет пропорционален  $\vartheta^2$ :

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{2e^2}{3\pi c} \gamma^2 \vartheta^2. \quad (8.6)$$

Если же углы рассеяния превосходят угол раствора конуса излучения,  $\vartheta \gg \gamma^{-1}$  (но по-прежнему  $\vartheta \ll 1$ ), то сокращения полей практически не происходит. При этом спектр излучения слабо зависит от угла рассеяния:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{4e^2}{\pi c} \ln(\gamma\vartheta). \quad (8.7)$$

Таким образом, мы видим, что при  $\gamma\vartheta \ll 1$  и  $\gamma\vartheta \gg 1$  характер излучения существенно различен. В первом случае имеет место интерференция волн, излученных в направлениях начального и конечного движений частицы; во втором случае интерференция практически отсутствует.

Приведенными выше формулами можно пользоваться, когда путь, проходимый электроном в веществе, меньше или порядка длины когерентности. Иными словами, требуется, чтобы толщина вещества не превосходила длину когерентности. Если же толщина мишени  $L$  будет больше длины когерентности  $l$ , то для нахождения спектральной плотности излучения необходим специальный расчет. Такой расчет будет сделан в последующих главах. Здесь же мы приведем простые оценки величины спектральной плотности излучения для этого случая [6].

Для оценки спектра излучения при  $L \gg l$  нужно, очевидно, разбить мишень на слои, толщина которых равна длине когерентности  $l$ , и просуммировать поля, возникающие на каждом таком слое. Интерференцию же излучений от отдельных слоев при этом можно не учитывать. Тогда на  $n$ -м участке пути спектрально-угловая плотность излучения будет определяться по порядку величины формулами (3.2) и (7.4). Суммарная же спектрально-угловая плотность излучения при этом будет равна

$$\frac{d^3\mathcal{E}}{d\omega d\sigma} \sim \frac{e^2}{4\pi^2 c} \sum_n \left[ \left| \mathbf{k}, \left( \frac{\mathbf{v}_n}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_n} - \frac{\mathbf{v}_{n-1}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{n-1}} \right) \right| \right]^2. \quad (8.8)$$

Здесь  $\mathbf{v}_n$  — скорость частицы в конце  $n$ -го участка и суммирование ведется по всем участкам пути.

Основной вклад в интеграл по углам излучения дают значения  $\theta \sim \max(\gamma^{-1}, |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_{n-1}|/v)$  в каждом слагаемом (8.8), поэтому, используя (7.4) и учитывая, что число слоев равно  $L/l$ , получим

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \sim \frac{L}{l} \frac{d\mathcal{E}_1}{d\omega}, \quad (8.9)$$

где  $d\mathcal{E}_1/d\omega$  определяется формулой (7.4),  $\vartheta_1$  — угол рассеяния на длине когерентности  $l$ , а  $l$  определяется из соотношения (4.7).

## КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ В ОБЛАСТИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

### § 9. Волновая функция быстрой частицы во внешнем поле

В предыдущей главе мы рассматривали излучение, основываясь на классической картине, в которой движение частицы описывается траекторией и не учитывается отдача при излучении. В этой главе мы изложим основные результаты квантовой теории излучения быстрых частиц.

В квантовой теории основным понятием является понятие волновой функции частицы, зависящей от координат и времени. Квадрат модуля этой функции определяет вероятность нахождения частицы в данной точке. Нас в дальнейшем будет интересовать излучение быстрого электрона (позитрона), движущегося во внешнем поле. Волновая функция его, точнее биспинор  $\Psi$ , определяется уравнением Дирака [1]

$$[\gamma_{\mu}(p_{\mu} - eA_{\mu}) - m]\Psi = 0, \quad (9.1)$$

где  $\gamma_{\mu}$  — матрицы Дирака ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ );  $p_{\mu} = (i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar \nabla)$  и  $A_{\mu}$  — 4-вектор потенциала внешнего поля.

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$\Psi = \frac{1}{2m} [\gamma_{\mu}(p_{\mu} - eA_{\mu}) + m]\Phi, \quad (9.2)$$

где биспинор  $\Phi$  удовлетворяет уравнению

$$[(p_{\mu} - eA_{\mu})^2 - m^2 - \frac{1}{2}ie\hbar \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}]\Phi = 0. \quad (9.3)$$

Здесь  $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$  — тензор электромагнитного поля и  $\sigma_{\mu\nu}$  — антисимметричный матричный 4-тензор:

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} - \gamma_{\nu}\gamma_{\mu}).$$

Если в уравнении (9.3) отбросить член  $\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ , описывающий взаимодействие типа спин-поле, то мы приходим к уравнению Клейна — Гордона

$$[(p_{\mu} - eA_{\mu})^2 - m^2]\Phi = 0. \quad (9.4)$$

При высоких энергиях решение уравнения (9.3) удобно искать в виде [2]

$$\Phi = f \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\right), \quad (9.5)$$

где  $S$  и  $f$ —функции, удовлетворяющие уравнениям

$$(\partial_\mu S - eA_\mu)^2 - m^2 = 0, \quad (9.6a)$$

$$[\partial_\mu (\partial_\mu S - eA_\mu)] f + 2(\partial_\mu S - eA_\mu) \partial_\mu f -$$

$$-\frac{ie}{2} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} f = i\hbar \square f. \quad (9.6b)$$

Связано это с тем, что при высоких энергиях фаза волновой функции  $S/\hbar$  велика по сравнению с единицей. По этой же причине представление (9.5) удобно для определения волновой функции в квазиклассическом приближении.

Первое из уравнений (9.6) представляет собой релятивистское уравнение Гамильтона—Якоби для классического действия  $S$ . Решение этого уравнения, как известно [3], имеет вид

$$S = S(r_i, \alpha_i, t), \quad (9.7a)$$

где  $\alpha_i$ —некоторые постоянные, определяющие полный интеграл уравнения (9.6a). Постоянные  $\alpha_i$  выбираются так, что детерминант

$$D = \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial r_i \partial \alpha_i} \right\|,$$

составленный из производных действия  $S$  по переменным  $r_i$  и  $\alpha_i$  отличен от нуля. Если в начальный момент времени волновая функция частицы представляет собой плоскую волну, то постоянные  $\alpha_i$  могут быть выражены через импульс  $\mathbf{p}$ , определяющий эту волну. При этом действие  $S$  будет определяться значением координаты  $\mathbf{r}$ , относящейся к моменту времени  $t$ , и начальным импульсом  $\mathbf{p}$ :

$$S = S(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t). \quad (9.7b)$$

Уравнение (9.6b) определяет поведение волнового пакета и спина электрона во внешнем поле. Если в этом уравнении пренебречь слагаемым, пропорциональным  $\hbar$ , то волновые пакеты будут вести себя так же, как частицы, движущиеся по классическим траекториям, отвечающим действию  $S$ . Чтобы убедиться в этом, рассмотрим решение (9.6a), соответствующее фиксированному значению энергии  $E$ , т. е. положим

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = -Et + S(\mathbf{r}, \mathbf{p}). \quad (9.8)$$

Тогда, пренебрегая в (9.6b) членом  $i\hbar \square f$ , приходим к следующему уравнению для  $f$ :

$$(\Delta S) f + 2(E - eA_0) \partial_t f + 2(\nabla S - e\mathbf{A}) \nabla f - \frac{ie}{2} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} f = 0. \quad (9.9)$$

Решение этого уравнения, как легко проверить, имеет вид

$$f = (E - eA_0)^{-1/2} \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{p}} \right\|^{1/2} u, \quad (9.10)$$

где  $u$  — биспинор, удовлетворяющий уравнению

$$i \frac{d}{dt} u = -\frac{e}{4(E - eA_0)} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} u. \quad (9.11)$$

Последнее уравнение описывает движение спина электрона в заданном электромагнитном поле  $F_{\mu\nu}$ . В пренебрежении взаимодействием типа спин-поле решение (9.11) представляет собой постоянный биспинор  $u_0$ .

Входящий в (9.10) детерминант

$$D = \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{p}} \right\| \quad (9.12)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} D + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{v} D) = 0, \quad (9.13)$$

где  $\mathbf{v}$  — вектор скорости, определяемый соотношением

$$\mathbf{v} = \frac{\nabla S - e\mathbf{A}}{E - eA_0}. \quad (9.14)$$

Мы видим, что детерминант  $D$  — этот детерминант носит название детерминанта Ван Флека — представляет собой решение уравнения непрерывности для некоторой плотности в конфигурационном пространстве. Ван Флек показал [4], что если известно решение уравнения Гамильтона — Якоби, то можно ввести сохраняющуюся плотность в конфигурационном пространстве. Эта величина представляет собой детерминант (9.12).

Замечая, что согласно уравнениям Гамильтона, величина

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\partial S(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \quad (9.15)$$

представляет собой начальное значение траектории  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p})$ , запишем детерминант (9.12) в виде

$$D = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \mathbf{r}} \right\| = \int d^3 \mathbf{r}_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p})). \quad (9.16)$$

Таким образом, если в уравнении (9.6) пренебречь слагаемым, пропорциональным  $\hbar$ , то волновая функция (9.5) определяется классической траекторией частицы во внешнем поле, которой соответствует действие  $S$ :

$$\Phi = \left[ \frac{1}{E - eA_0} \int d^3 \mathbf{r}_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p})) \right]^{1/2} u_0 e^{\frac{i}{\hbar}(S(\mathbf{r}, \mathbf{p}) - Et)}. \quad (9.17)$$

В этом случае волновой пакет со временем не расплывается.

Обратим внимание на следующее. При нахождении волновой функции (9.17) предполагалось, что траектория частицы  $\mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p})$  определяется начальной координатой и начальным



импульсом. Траектория в этом случае является однозначной функцией величин  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{p}$ . Возможна, однако, и другая постановка граничных условий, при которых одним и тем же граничным условиям соответствует не одна, а две или большее число траекторий. А именно, если мы потребуем, чтобы траектория  $\mathbf{r}(t)$  в начальный момент времени имела импульс  $\mathbf{p}$ , а в конечный момент времени имела импульс  $\mathbf{p}'$ , то при такой постановке граничных условий импульсы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$  вообще говоря, не определяют однозначно траекторию. Такая ситуация имеет место, например, в случае радужного рассеяния частиц, когда угол рассеяния является двузначной функцией прицельного параметра и отмеченным граничным условиям соответствуют две траектории (см. § 39). При такой постановке граничных условий волновая функция в квазиклассическом приближении должна определяться с учетом отмеченной неоднозначности. Мы не будем здесь подробно останавливаться на этом вопросе (см. по этому поводу обзоры [5—10]). Отметим только, что указанная неоднозначность играет важную роль при вычислении матричных элементов и вероятностей многих физических процессов, таких как радужное рассеяние, неупругие процессы при столкновении сложных атомов, распад ядер, квантование сложных систем и др.

Покажем теперь, что к распыванию волновых пакетов приводит учет отброшенного в (9.66) слагаемого. При высоких энергиях скорость, с которой будет распыляться пакет, пропорциональна  $p^{-1}$ , поэтому для частиц высоких энергий распыление волновых пакетов будет происходить весьма медленно.

Чтобы убедиться в этом, обратимся к уравнению (9.4), считая для простоты, что частица бесспиновая, и что внешнее поле отсутствует [11]. Решение уравнения (9.4) в этом случае может быть представлено в виде

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = A \int d^3k c(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}. \quad (9.18)$$

Здесь  $\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$  и  $A$  — нормировочный множитель.

Если в начальный момент времени пакет был гауссовым с шириной  $a$  и имел импульс  $\mathbf{p}$  такой, что

$$c(\mathbf{k}, 0) = \frac{A}{a^3} \exp\left(i\mathbf{p}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}^2}{2a^2}\right), \quad (9.19)$$

то к моменту времени  $t$  этот пакет будет определяться соотношением (9.18) с

$$c(\mathbf{k}) = \exp\left[-\frac{1}{2}a^2(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2\right]. \quad (9.20)$$

Запишем волновую функцию (9.18) в виде

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = AI(\mathbf{r}, t) \exp [i(\mathbf{p}\mathbf{r} - Et)], \quad (9.21)$$

где  $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$  и  $I(\mathbf{r}, t)$  — величина, определяющая изменение волнового пакета со временем:

$$I = \int d^3k \exp [-a^2(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + i(\mathbf{k} - \mathbf{p})\mathbf{r} - i(\omega - E)t]. \quad (9.22)$$

При высоких энергиях во входящей сюда величине  $(\omega - E)$  может быть выполнено разложение по обратным степеням энергии

$$\omega - E = \sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{q})^2 + m^2} - E \approx vq_z - \frac{1}{2} \frac{q^2}{E} - \frac{1}{2} v^2 \frac{q_z^2}{E} + \dots,$$

где  $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{p}$  и  $v = \mathbf{p}/E$  (ось  $z$  параллельна  $\mathbf{p}$ ). Подставляя это разложение в (9.22), получим после простых вычислений

$$I = A(t) \exp \left[ i\alpha(\mathbf{r}, t) - \frac{(z - vt)^2}{2\Delta_{\parallel}^2} - \frac{x^2 + y^2}{\Delta_{\perp}^2} \right], \quad (9.23)$$

где  $A(t)$  — медленно меняющаяся со временем величина:

$$A(t) = \frac{1}{a^2 + it/E} \frac{1}{a^2 + (i/2E)t(1 - v^2)},$$

$\alpha(\mathbf{r}, t)$  — действительная фаза,

$$\Delta_{\parallel}^2 = a^2 + \frac{m^4}{a^2 E^6} t^2, \quad \Delta_{\perp}^2 = a^2 + \frac{t^2}{a^2 E^2}. \quad (9.24)$$

Формулы (9.24) показывают, что в поперечном и в продольном направлениях квадраты ширины пакетов  $\Delta_{\perp}^2$  и  $\Delta_{\parallel}^2$  растут со временем пропорционально  $t^2/E^2$  и  $t^2 m^4/E^6$  соответственно. В нерелятивистском случае эти величины не зависят от энергии частицы ( $t^2 E^{-2} = t^2 m^{-2}$ ); в релятивистском же случае величины  $t^2 E^{-2}$  и  $t^2 m^4 E^{-6}$  существенно меньше соответствующих величин для нерелятивистской частицы. Отметим, что для продольного направления в  $\Delta_{\parallel}^2$  присутствует дополнительный множитель  $m^4 E^{-4}$ , приводящий к существенному уменьшению скорости роста пакета в этом направлении по сравнению со скоростью роста пакета в поперечном направлении.

Таким образом, мы видим, что релятивистские эффекты оказывают стабилизирующее влияние на волновые пакеты.

Для частиц высоких энергий можно указать процедуру приближенного решения уравнений (9.6) для  $S$  и  $f$ , когда возможно разложение этих функций по обратным степеням импульса частицы [12]:

$$S(\mathbf{r}) = \mathbf{p}\mathbf{r} + \chi_0(\mathbf{r}) + \chi_1(\mathbf{r}) + \dots, \quad f(\mathbf{r}) = f_0 + f_1(\mathbf{r}) + \dots, \quad (9.25)$$

где  $\chi_n$  и  $f_n$  пропорциональны  $p^{-n}$ .

Рассмотрим для простоты случай, когда  $eA_\mu = (U(\mathbf{r}), 0)$ . Тогда первые члены разложения (9.25), соответствующие асимптотике волновой функции при  $z \rightarrow -\infty$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = ue^{i(\mathbf{p}\mathbf{r} - Et)\hbar}, \quad (9.26a)$$

имеют вид

$$\chi_0 = -\frac{1}{v} \int_{-\infty}^z dz' U(\rho, z'), \quad \chi_1 = -\frac{1}{p} \int_{-\infty}^z dz' [(\nabla \chi_0)^2 - U^2], \quad (9.26b)$$

$$f_0 = u, \quad f_1 = -\frac{1}{2p} \int_{-\infty}^z dz' \left( \frac{d^2}{d\rho^2} \chi_0 \right) u,$$

где  $u$  — постоянный биспинор и ось  $z$  параллельна  $\mathbf{p}$ .

Разложения (9.25) справедливы, если  $|\chi_0| \gg |\chi_1|$  и  $|f_0| \gg |f_1| \gg |f_2|, \dots$ . Из этих неравенств следует, что

$$|U| \ll pv, \quad \frac{|\chi_0| \bar{z}}{p\rho^2} \ll 1, \quad \frac{\hbar \bar{z}}{p\rho^2} \ll 1, \quad (9.27)$$

где  $\bar{z}$  — эффективная область координаты  $z$ , в которой отличны от нуля интегралы по  $z$  в (9.26).

Если в (9.26) отбросить слагаемые, пропорциональные  $p^{-1}$ , то мы получим волновую функцию частицы в так называемом эйкональном приближении

$$\Phi^{(E)} = ue^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\mathbf{r} + \chi_0(\mathbf{r}) - Et)}. \quad (9.28)$$

Подставляя функцию (9.5) в (9.2) и сохраняя главный член разложения  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  по  $p^{-1}$ , получим

$$\Psi = \Phi^{(E)}. \quad (9.29)$$

Легко получить также следующее приближение в  $\Psi$ , содержащее спинорную структуру, отличную от структуры (9.29):

$$\Psi = \left( 1 - \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^z dz' \gamma_0 (\gamma \nabla U) \right) \Phi^{(E)}. \quad (9.30)$$

Учет в (9.30) члена, содержащего  $\gamma$ -матрицы, необходим при вычислении конкретных матричных элементов ряда процессов, так как он может давать вклад, сравнимый со вкладом слагаемого, не содержащего  $\gamma$ -матриц [13].

Аналогичные результаты можно получить, если волновая функция имеет вид плоской волны не при  $z \rightarrow -\infty$ , а при

$z \rightarrow \infty$ , т. е. в конечном состоянии. В последнем случае первые члены разложения волновой функции  $\Psi$  имеют вид

$$\Psi = \left( 1 + \frac{1}{2p} \int_z^\infty dz' \gamma_0 (\gamma \nabla U) \right) u \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}\mathbf{r} + \chi_0^{(+)} - Et) \right], \quad (9.31)$$

где

$$\chi_0^{(+)} = \frac{1}{v} \int_z^\infty dz' U(p, z').$$

## § 10. Упругое рассеяние при высоких энергиях

Рассмотрим вначале простейший электродинамический процесс взаимодействия заряженной частицы с внешним постоянным полем. Таковым является упругое рассеяние частицы рассеивающим центром. Дифференциальное и полное сечение этого процесса, как известно [1], определяются формулами

$$d\sigma = |a(\vartheta)|^2 d\sigma, \quad (10.1)$$

$$\sigma = 4\pi \frac{\hbar}{p} \text{Im} a(\vartheta) \Big|_{\vartheta=0}, \quad (10.2)$$

где  $d\sigma$  — элемент телесного угла в направлении конечного движения,  $\mathbf{p}$  — импульс частицы и  $a(\vartheta)$  — амплитуда ее упругого рассеяния на угол  $\vartheta$ :

$$a(\vartheta) = -\frac{1}{4\pi\hbar^2} \int d^3r e^{-i\mathbf{p}'\mathbf{r}/\hbar} \overline{u'} \gamma_0 \psi(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}). \quad (10.3)$$

Здесь  $u'$  — биспинор конечной частицы,  $\mathbf{p}'$  — ее импульс и  $\psi(\mathbf{r})$  — волновая функция частицы в поле  $U(\mathbf{r})$ , обладающая асимптотикой (9.20а) при  $z \rightarrow -\infty$ .

Формула (10.3) показывает, что для нахождения амплитуды рассеяния необходимо знать волновую функцию частицы в пределах действия на нее поля  $U(\mathbf{r})$ .

Если энергия частицы велика, то характерные значения углов рассеяния малы. При нахождении амплитуды рассеяния в этом случае можно воспользоваться волновой функцией (9.24). Подставляя эту функцию в (10.3), получим с точностью до членов порядка  $p^{-1}$  следующее выражение для амплитуды рассеяния в эйкональном приближении:

$$a(\vartheta) = \frac{E}{2\pi} \int d^2\rho dz U(\mathbf{r}) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\mathbf{q}\rho + \chi_0(\mathbf{r})) \right], \quad (10.4)$$

где  $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$  — импульс, переданный рассеивающему центру. Множитель  $\exp\left(\frac{i}{\hbar} q_z z\right)$  мы заменили здесь на единицу, так

как компонента переданного импульса  $q_z \approx q_1^2/2p$  пропорциональна  $p^{-1}$ . Выполнив в (10.4) интегрирование по  $z$ , получаем

$$a(\vartheta) = \frac{ip}{2\pi} \int d^2\rho e^{i\mathbf{q}\rho/\hbar} \left[ 1 - \exp\left(\frac{i}{\hbar} \chi_0(\rho)\right) \right], \quad (10.5)$$

$$\chi_0(\rho) = -\frac{1}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} dz U(\rho, z). \quad (10.6)$$

Отметим, что при выводе формулы (10.5) не использован конкретный вид функции  $U(\mathbf{r})$ , поэтому формулой (10.5) можно пользоваться при изучении рассеяния частицы как в поле отдельного рассеивающего центра, так и в поле совокупности многих рассеивающих центров. В частности, она широко применяется при изучении различных процессов рассеяния быстрых частиц ядрами и носит название приближения Глаубера—Ситенко [14, 15]. Ее можно применять также при изучении рассеяния быстрых частиц в веществе.

Учет в формулах (9.24) и (10.3) членов порядка  $p^{-1}$  (как в экспоненте, так и предэкспоненциальном факторе) приводит к следующему выражению для амплитуды рассеяния [12]:

$$a(\vartheta) = \frac{ip}{2\pi} \int d^2\rho e^{i\mathbf{q}\rho/\hbar} \left\{ 1 - \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\chi_0(\rho) + \chi_1(\rho))\right] \right\}, \quad (10.7)$$

где

$$\chi_1(\rho) = \frac{1}{pv} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left\{ z \left( \frac{\partial}{\partial \rho} U \right) \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{-\infty}^z dz' U \right) - \frac{1-v^2}{2v} U^2 \right\}. \quad (10.8)$$

При выводе (10.7) предполагалось, что  $U(\rho, z) = U(\rho, -z)$ .

Формула (10.7) может быть получена также на основе метода эйконального разложения амплитуды рассеяния [16] и на основе решения интегрального уравнения для волновой функции быстрой частицы во внешнем поле [17].

Формула (10.7) позволяет оценить область применимости эйконального приближения. Для этого требуется, чтобы в области переменных  $\rho$  и  $z$ , дающей главный вклад в амплитуду, выполнялось неравенство

$$|\chi_0| \gg |\chi_1|. \quad (10.9)$$

Это неравенство при достаточно высоких энергиях всегда выполняется.

Если величина  $\chi_0(\rho)$  зависит только от модуля прицельного параметра, то в (10.7) можно выполнить интегрирование по углу между  $\mathbf{q}_\perp$  и  $\rho$ :

$$a(\vartheta) = ip \int_0^\infty \rho d\rho J_0\left(\frac{q_\perp \rho}{\hbar}\right) \left\{ 1 - \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\chi_0(\rho) + \chi_1(\rho))\right] \right\}, \quad (10.10)$$

где  $J_0(x)$  — функция Бесселя:

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \exp(ix \cos \varphi).$$

При этом полное сечение упругого рассеяния (10.2) будет определяться формулой

$$\sigma = 4\pi \operatorname{Re} \int_0^\infty \rho d\rho \left\{ 1 - \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\chi_0(\rho) + \chi_1(\rho))\right] \right\}. \quad (10.11)$$

Рассмотрим несколько предельных случаев эйкональной амплитуды рассеяния. Если  $|\chi_0| \ll \hbar$ , то в (10.5) может быть выполнено разложение по  $\chi_0/\hbar$ . Первый член такого разложения, соответствующий первому борновскому приближению, имеет следующий вид:

$$a(\vartheta) = \frac{p}{2\pi\hbar} U_{\mathbf{q}}, \quad U_{\mathbf{q}} = \int d^2\rho dz U(\rho, z) e^{iq\rho/\hbar}. \quad (10.12)$$

Пусть теперь  $|\chi_0| \gg \hbar$ . Этот случай соответствует переходу к классической механике ( $\hbar \rightarrow 0$ ). При  $\hbar \rightarrow 0$  можно воспользоваться следующим асимптотическим представлением функции Бесселя [18]:

$$J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \gg 1. \quad (10.13)$$

Подставляя это соотношение в (10.10), получим

$$a(\vartheta) = ip \int_0^\infty d\rho \left(\frac{2\hbar\rho}{q_\perp}\right)^{1/2} \cos\left(\frac{q_\perp\rho}{\hbar} - \frac{\pi}{4}\right) \left[ 1 - e^{i\chi_0(\rho)/\hbar} \right]. \quad (10.14)$$

Для вычисления входящего сюда интеграла можно воспользоваться методом стационарной фазы [19]. В результате находим

$$a(\vartheta) = -ip \left(\frac{\rho}{q_\perp} \frac{d\rho}{dq_\perp}\right)^{1/2} \exp\left[-i\frac{\pi}{4} - \frac{i}{\hbar}(q_\perp\rho - \chi_0(\rho))\right], \quad (10.15)$$

где  $\rho = \rho(q_\perp)$  определяется из условия стационарной фазы:

$$q_\perp = \frac{d}{d\rho} \chi_0(\rho). \quad (10.16)$$

Дифференциальное сечение рассеяния (10.1) при этом совпадает с результатом, даваемым классической теорией рассеяния,

$$d\sigma_{cl} = 2\pi\rho \left| \frac{d\rho}{dq_{\perp}} \right| dq_{\perp}. \quad (10.17)$$

Этой формулой можно пользоваться, если  $q_{\perp}\rho(q_{\perp}) \gg \hbar$ .

Обратим внимание на то, что уравнение (10.16) может иметь не один, а два и большее число корней. Такая ситуация имеет место, например, если функция  $d\chi_0(\rho)/d\rho$  содержит максимум при некотором ненулевом значении прицельного параметра. При этом заданному значению угла рассеяния будут соответствовать два прицельных параметра. Вычисление амплитуды рассеяния в этом случае должно проводиться с учетом неоднозначности зависимости  $q_{\perp}$  от  $\rho$ , а именно, метод стационарной фазы должен быть применен для каждой точки стационарной фазы отдельно и результирующие выражения для амплитуд рассеяния должны быть сложены [5]:

$$a(\vartheta) = a_1(\vartheta) + a_2(\vartheta). \quad (10.18)$$

Дифференциальное сечение рассеяния (10.1) при этом приобретает вид

$$d\sigma = |a_1(\vartheta) + a_2(\vartheta)|^2 d\sigma. \quad (10.19)$$

Это сечение отличается от соответствующего выражения для сечения, найденного в рамках классической теории рассеяния;

$$d\sigma_{cl} = (|a_1(\vartheta)|^2 + |a_2(\vartheta)|^2) d\sigma, \quad (10.20)$$

так как амплитуда  $a_1(\vartheta)$  и  $a_2(\vartheta)$  между собой интерферируют. Если отмеченной интерференцией пренебречь, то сечения (10.19) и (10.20) совпадут.

Таким образом, если угол рассеяния является неоднозначной функцией прицельного параметра, то при рассеянии частиц возможны интерференционные явления. Более подробно некоторые из этих явлений будут рассмотрены ниже, в гл. 5.

## § 11. Рассеяние быстрых частиц цепочкой атомов

В предыдущем параграфе излагалась общая теория упругого рассеяния быстрых заряженных частиц в произвольном внешнем поле. При этом отмечалось, что полученными формулами можно пользоваться при изучении рассеяния частиц как в поле отдельного атома, так и в поле, создаваемом совокупностью атомов. Требуется только, чтобы энергия частицы была достаточно велика. Особый интерес представляет случай, когда атомы образуют периодическую структуру. Наличие такой структуры может оказать существенное влияние на характер рассеяния.

Рассмотрим прежде всего упругое рассеяние быстрых электронов линейной цепочкой  $N$  атомов, расположенных на

расстоянии  $a$  друг от друга вдоль импульса падающих частиц [13]. Этот случай представляет интерес, поскольку в зависимости от числа атомов  $N$  взаимодействие частицы с цепочкой может быть рассмотрено как в рамках борновского приближения квантовой теории рассеяния, так и в рамках классической механики. Иными словами, эффективность взаимодействия частицы с цепочкой будет изменяться с изменением  $N$ .

Действительно, если  $u(\rho, z)$  — потенциальная энергия взаимодействия электрона с одним атомом, то потенциальная энергия взаимодействия электрона с цепочкой  $N$  атомов будет иметь вид

$$U^{(N)}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{N-1} u(\rho, z - na). \quad (11.1)$$

(Направление движения налетающей на цепочку частицы совпадает с осью цепочки — рис. 2.1.) Подставляя это выражение

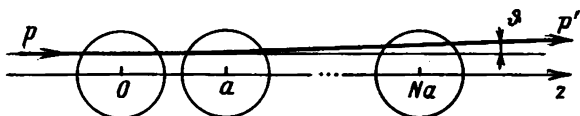


Рис. 2.1. Взаимодействие быстрой частицы с цепочкой атомов

для потенциальной энергии в формулы (10.6) и (10.8) для  $\chi_0(\rho)$  и  $\chi_1(\rho)$ , получим при  $N \gg 1$

$$\chi_0^{(N)} = N\chi_0, \quad \chi_1^{(N)} = \frac{N^3 a}{12p} \left( \frac{d}{d\rho} \chi_0 \right)^2, \quad (11.2)$$

где  $\chi_0 = -v^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dz u(\rho, z)$ . В результате приходим к следующему выражению для амплитуды упругого рассеяния электронов цепочкой атомов:

$$a^{(N)}(q) = ip \int_0^{\infty} \rho d\rho J_0 \left( \frac{q\rho}{\hbar} \right) \left\{ 1 - \exp \left[ \frac{iN}{\hbar} \left( \chi_0 + \frac{N^2 a}{12p} \left( \frac{d}{d\rho} \chi_0 \right)^2 + \dots \right) \right] \right\}. \quad (11.3)$$

Это выражение для амплитуды рассеяния справедливо, если выполнены неравенства (9.21). Для цепочки атомов  $\bar{z} \sim Na$  и  $\rho \sim R$ , поэтому условия (9.21) приобретают вид

$$|U| \ll pv, \quad \frac{N^2 a |\chi_0|}{\rho R^2} \ll 1, \quad \frac{\hbar Na}{\rho R^2} \ll 1, \quad (11.4)$$

где  $R$  — радиус экранирования потенциала атома.



Второе и третье неравенства ограничивают число атомов в цепочке. С увеличением  $N$ , очевидно, первым нарушается неравенство

$$\frac{N^2 a \chi_0}{pR^2} \ll 1.$$

Переписав его в виде

$$N|\chi_0|/pR \ll R/Na \quad (11.5)$$

и заметив, что среднее значение угла рассеяния частицы цепочкой по порядку величины равно  $\vartheta \sim N\chi_0/pR$  (см. формулу (11.20)), приходим к выводу, что угол рассеяния должен быть мал по сравнению с  $R/Na$  (эту величину можно назвать углом раствора цепочки). Иными словами, выражение (11.3) для амплитуды рассеяния справедливо, если частица, рассеиваясь, остается в пределах цепочки на всей ее длине. Так как с ростом энергии средний угол рассеяния убывает, то с ростом энергии увеличивается допустимая длина цепочки, для которой справедлива формула (11.3).

Заметим, что условие применимости борновского приближения для цепочки атомов имеет вид

$$N|\chi_0| \ll \hbar. \quad (11.6)$$

При  $v \rightarrow 1$  это условие не зависит от энергии частицы. Поэтому при больших энергиях область применимости формулы (11.3) гораздо шире области применимости борновской амплитуды рассеяния (10.12).

Выясним теперь характерные особенности поведения сечения упругого рассеяния в зависимости от числа атомов в цепочке.

Если число атомов в цепочке таково, что выполняется условие применимости борновского приближения (11.6), то экспоненту в (11.3) можно разложить в ряд по потенциалу. В результате получим следующее выражение для дифференциального сечения упругого рассеяния неполяризованных частиц:

$$d\sigma^{(N)} = \frac{2\pi N^2}{\hbar^4} \left| \int_0^\infty \rho d\rho J_0\left(\frac{q\rho}{\hbar}\right) \left\{ \chi_0 + \frac{N^2 a}{12p} (\nabla\chi_0)^2 + \dots \right\} \right|^2 q dq. \quad (11.7)$$

Так как  $N^2 a |\nabla\chi_0|^2 / 12p \ll |\chi_0|$ , то в первом борновском приближении сечение рассеяния пропорционально квадрату числа атомов цепочки [20, 21]. Иными словами, в борновском приближении взаимодействие частицы с цепочкой носит когерентный характер, т. е. складываются не сечения, а амплитуды рассеяния на каждом из рассеивающих центров.

Второе слагаемое в квадратной скобке формулы (11.7) соответствует вкладу в сечение второго борновского приближения. Мы видим, что относительный вклад второго борновского

приближения также пропорционален квадрату числа атомов цепочки.

Учет второго борновского приближения приводит к зависимости сечения от знака заряда частицы. При рассеянии электронов и позитронов на отдельном атоме различие их сечений упругого рассеяния незначительно. Так, например, при рассеянии в кулоновском поле отдельного атома из (11.7) находим следующее выражение для сечения рассеяния под малыми углами [1]:

$$d\sigma = \frac{8\pi Z^2 e^4}{v^2 q_{\perp}^3} \left( 1 - \frac{e}{|e|} \frac{\pi Z e^2 q_{\perp}}{2\hbar p} v^2 + \dots \right) dq_{\perp}. \quad (11.8)$$

Эта формула показывает, что при больших значениях импульса  $p$  поправка, учитывающая знак заряда, исчезающе мала. Если же рассеяние происходит на цепочке атомов, то различие в сечениях рассеяния электронов и позитронов может быть большим, так как оно пропорционально  $N^2$ .

При достаточно больших значениях  $N$  всегда может быть выполнено условие

$$N|\chi_0| \gg \hbar, \quad (11.9)$$

противоположное условию применимости борновского приближения (11.6). В этом случае в широкой области углов рассеяния, за исключением малой области вблизи нуля, где  $p q_{\perp} \lesssim \hbar$ , для вычисления амплитуды рассеяния (11.3) можно воспользоваться методом стационарной фазы. Таким путем, согласно (10.16) и (10.17), можно найти зависимость переданного импульса от прицельного параметра

$$q_{\perp} = N |\nabla \chi_0| \left( 1 + \frac{N^2 a}{6p} \nabla^2 \chi_0 + \dots \right) \quad (11.10)$$

и получить дифференциальное сечение рассеяния

$$d\sigma^{(N)} = 2\pi \rho(q_{\perp}) \left| \frac{dp}{dq_{\perp}} \right| dq_{\perp}. \quad (11.11)$$

При малых углах рассеяния ( $p \vartheta \rho(\vartheta) \lesssim \hbar$ ) пользоваться методом стационарной фазы нельзя, так как вблизи нулевого угла нет стационарной точки. Амплитуду рассеяния в этом случае следует вычислять непосредственно по формуле (11.3).

Заметим, что поправка, обусловленная величиной  $\chi_1^{(N)}$ , в (11.10) и (11.11), так же как и в (11.7), пропорциональна  $N^2$  и зависит от знака заряда частицы.

Если потенциал отдельного атома цепочки представляет собой экранированный потенциал Кулона (7.5), то нетрудно получить явное выражение для сечения рассеяния при  $NZe^2/\hbar v \gg 1$ . При этом следует различать три характерных интервала значений переданных импульсов  $q_{\perp}$ . В области малых значений  $q_{\perp} \lesssim \hbar \left( R \ln \frac{NZe^2}{\hbar v} \right)$  для вычисления сечения

следует воспользоваться выражением (11.3) для амплитуды рассеяния. Пренебрегая слагаемым  $\chi_1^{(N)}$ , находим [21], что

$$d\sigma^{(N)} = \frac{2\pi R^2 dq_{\perp}}{q_{\perp}} \left( \ln \frac{NZe^2 \gamma \sqrt{\pi}}{\hbar v} \right)^2 J_1 \left( \frac{q_{\perp} R}{\hbar} \ln \frac{NZe^2 \gamma \sqrt{\pi}}{\hbar v} \right). \quad (11.12)$$

Здесь  $\gamma = \exp(-G)$ , а  $G \approx 0,577$  — постоянная Эйлера.

Для переданных импульсов  $q_{\perp} > \hbar / \left( R \ln \frac{NZe^2}{\hbar v} \right)$  дифференциальное сечение может быть вычислено методом стационарной фазы по формулам (11.10) и (11.11). Если при этом  $q_{\perp} \lesssim 2NZe^2/vR$ , то

$$d\sigma^{(N)} = \frac{2\pi R^2 dq_{\perp}}{q_{\perp}} \ln \frac{2NZe^2}{q_{\perp} v R}, \quad (11.13)$$

если же  $q_{\perp} > 2NZe^2/vR$ , то

$$d\sigma^{(N)} = \frac{8\pi N^2 Z^2 e^4}{v^2 q_{\perp}^3} dq_{\perp}. \quad (11.14)$$

Рассмотрим теперь зависимость от  $N$  полного сечения и среднего значения квадрата угла рассеяния частиц цепочкой.

Выполнив интегрирование в дифференциальном сечении упругого рассеяния по переданным импульсам, получим полное сечение рассеяния  $\sigma^{(N)}$ . В рамках борновского приближения, согласно (11.7),

$$\sigma^{(N)} = \frac{2\pi N^2}{\hbar^2} \int_0^{\infty} \rho d\rho \left[ \chi_0 + \frac{N^2 a}{12\rho} (\nabla \chi_0)^2 + \dots \right]^2. \quad (11.15)$$

Мы видим, что при  $N|\chi_0| \ll \hbar$  полное сечение рассеяния значительно меньше геометрического поперечного сечения атома:

$$\sigma^{(N)} \approx (N\chi_0/\hbar)^2 R^2 \ll \pi R^2.$$

Это означает, что цепочка атомов для пучка падающих частиц является как бы прозрачной.

Полное сечение упругого рассеяния в борновском приближении с увеличением  $N$  растет пропорционально  $N^2$ . При выполнении условия (11.9), противоположного условию применимости борновского приближения, такое соотношение между  $\sigma^{(N)}$  и  $N$  нарушается. Оценка полного сечения рассеяния (10.11) при  $N|\chi_0| \gg \hbar$  показывает, что оно по порядку величины равно

$$\sigma^{(N)} \sim \bar{\rho}^2, \quad (11.16)$$

где  $\bar{\rho}$  — эффективное значение прицельного параметра в интеграле (10.11), определяемое из соотношения

$$N|\chi_0(\bar{\rho})| \sim \hbar.$$

Для цепочки атомов, потенциал которых представляет собой экранированный потенциал Кулона,

$$\chi_0^{(N)} = -2NZe|e|v^{-1}K_0(\rho/R),$$

где  $K_0(x)$  — модифицированная функция Ханкеля. Отсюда легко найти порядок величины  $\bar{\rho}$ :

$$\bar{\rho} \sim R \ln(2NZe^2/\hbar v).$$

Поэтому при  $NZe^2/\hbar v \gg 1$

$$\sigma^{(N)} \sim R^2 (\ln(2NZe^2/\hbar v))^2. \quad (11.17)$$

Таким образом, при  $NZe^2/\hbar v \gg 1$  полное сечение упругого рассеяния не пропорционально квадрату числа атомов цепочки, как это имеет место в борновском приближении. Квадратичная зависимость сечения от  $N$  заменяется более слабой — логарифмической. Другими словами, при  $NZe^2/\hbar v \gg 1$  полное сечение рассеяния почти не зависит от  $N$ . Полное сечение теперь совпадает по порядку величины с геометрическим поперечным сечением атома:  $\sigma^{(N)} \sim \pi R^2$ . Это означает, что цепочка атомов перестает быть прозрачной, т. е. все частицы, попадающие на «прицельную» площадь порядка  $\pi R^2$ , испытывают рассеяние на какой-либо угол.

Оценим теперь среднее значение квадрата переданного импульса при выполнении условий (11.5) и (11.7). Эта величина определяется соотношением

$$\overline{q_{\perp}^2} = \frac{1}{\sigma^{(N)}} \int q_{\perp}^2 d\sigma^{(N)}(q_{\perp}). \quad (11.18)$$

В борновском приближении, как легко проверить, средний квадрат переданного импульса не зависит от числа атомов в цепочке  $N$  и определяется, в основном, поперечными размерами области взаимодействия:

$$\overline{q_{\perp}^2} \sim (\hbar/R)^2. \quad (11.19)$$

Если же  $NZe^2 \gg \hbar v$ , то согласно (11.10) — (11.14),

$$\overline{q_{\perp}^2} \sim (NZe^2/R)^2. \quad (11.20)$$

Подводя итоги, можно сказать, что характер упругого рассеяния быстрых частиц цепочкой атомов существенно изменяется при выходе за рамки борновского приближения. Так, в области применимости борновского приближения ( $N|\chi_0| \ll \hbar$ ) дифференциальное и полное сечения упругого рассеяния пропорциональны квадрату числа атомов цепочки, а средний угол рассеяния от  $N$  не зависит. При выполнении же условия квазиклассичности взаимодействия частицы с цепочкой атомов ( $N|\chi_0| \gg \hbar$ ) полное сечение слабо (логарифмически) зависит от  $N$ , а средний угол рассеяния пропорционален  $N$ .

## § 12. Излучение фотона и образование электронно-позитронной пары в первом борновском приближении

Перейдем к рассмотрению процесса излучения фотона быстрой заряженной частицей во внешнем поле. Этот процесс характеризуется тем, что электрон вследствие взаимодействия с внешним полем с некоторой вероятностью излучает фотон, переходя при этом в новое состояние в данном поле. Вероятность такого процесса определяется соотношением [1]

$$dw_{fi} = \frac{2\pi e^2}{\omega} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} |M_{fi}|^2, \quad (12.1)$$

где  $M_{fi}$  — матричный элемент перехода из начального состояния  $\Psi_i$  в конечное состояние  $\Psi_f$  с излучением фотона:

$$M_{fi} = \int dt d^3r \bar{\Psi}_f(\mathbf{r}, t) \hat{e}^* e^{i(\omega t - \mathbf{k}r)} \Psi_i(\mathbf{r}, t), \quad (12.2)$$

$\mathbf{k}$  и  $\omega$  — импульс и энергия излученного фотона,  $\hat{e} = e_\mu \gamma_\mu$ .

Начальное ( $i$ ) и конечное ( $f$ ) состояния характеризуются начальными ( $\mathbf{p}$ ,  $E$ ) и конечными ( $\mathbf{p}'$ ,  $E'$ ) значениями импульса и энергии электрона.

В первом не исчезающем приближении по взаимодействию частицы с внешним полем матричному элементу  $M_{fi}$  отвечают две диаграммы — рис. 2.2. Штриховые линии соответствуют

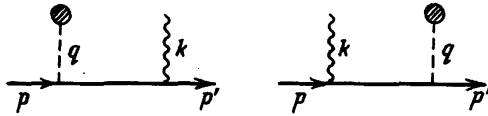


Рис. 2.2. Диаграммы, отвечающие процессу излучения электрона в первом борновском приближении

внешнему полю, так что  $q_\mu = p_\mu - p'_\mu - k_\mu$  есть 4-вектор передачи импульса ядру.

Если внешнее поле не зависит от времени и описывается статическим потенциалом  $eA_\mu = (U(\mathbf{r}), 0)$ , что имеет место, например, для неподвижного ядра, то

$$M_{fi} = \frac{\pi}{\sqrt{EE'}} \delta(q_0) M, \quad (12.3)$$

$$M = \bar{u}_f \left( \hat{e}^* \frac{\hat{f} + m}{f'^2 - m^2} \gamma_0 + \gamma_0 \frac{\hat{f} + m}{f^2 - m^2} \hat{e}^* \right) u_i U_q,$$

где  $q_0 = E - E' - \omega$ ,  $f' = p' + k$  и  $f = p - k$  — промежуточные 4-импульсы,  $\bar{u}_f$  и  $u_i$  — биспиноры излучающей частицы в конечном и начальном состояниях и  $U_q$  — фурье-компонента поля  $U(\mathbf{r})$ .

Зная матричный элемент, можно определить дифференциальное сечение тормозного излучения. В лабораторной системе

это сечение связано с вероятностью излучения (12.1), отнесенной к единице времени  $dw_t = t^{-1} dw$ , соотношением [1]

$$d\sigma = \frac{dw_t}{J}, \quad (12.4)$$

где  $J = v/V$  — плотность тока падающих частиц. В первом борновском приближении, согласно (12.1) — (12.4),

$$d\sigma = \frac{e^4}{4(2\pi)^4 \omega E E'} \delta(E - E' - \omega) |M|^2 d^3 p' d^3 k. \quad (12.5)$$

В матричный элемент (12.3) входят множители  $(1 - v \cos \theta)^{-1}$  и  $(1 - v' \cos \theta')^{-1}$ , где  $\theta$  и  $\theta'$  — углы между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{p}$  и векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{p}'$  соответственно, а  $v$  и  $v'$  — скорости начального и конечного электрона, поэтому в случае больших энергий ( $E \gg m$ ,  $E' \gg m$ ), когда  $v \approx 1$  и  $v' \approx 1$ , сечение тормозного излучения имеет резкий максимум вблизи направления импульса падающего электрона. Излучение сосредоточено при этом, в основном, в узком конусе около этого направления с углом раствора порядка  $\theta \sim m/E$ ; в этом же конусе лежит импульс рассеянного электрона. Дифференциальное сечение излучения (12.5) в этом случае удобно выразить через компоненты переданного импульса  $\mathbf{q}$  и переменную  $\theta$ .

Используя законы сохранения энергии и импульса

$$\begin{aligned} E &= E' + \omega, \\ \mathbf{p} &= \mathbf{p}' + \mathbf{k} + \mathbf{q}, \end{aligned} \quad (12.6)$$

и учитывая, что в области больших энергий основной вклад в излучение вносят углы  $\theta \sim m/E$  и  $\theta' \sim m/E'$ , получим с точностью до членов порядка  $m^2/E^2$  и  $m^2/E'^2$

$$d\sigma = \frac{e^2}{16\pi^4} \frac{E'}{E} |M|^2 \frac{\delta' d\omega}{m^2 \omega} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} d^3 q, \quad (12.7)$$

где  $\delta' = \omega m^2 / 2EE'$ . Входящая сюда переменная  $y$  связана с  $\theta$  соотношением

$$(E\theta/m)^2 = b + y\sqrt{a}, \quad -1 \leq y \leq 1, \quad (12.8)$$

где

$$a = \frac{4q_z^2}{m^2 \delta'} \left( q_z - \delta' - \frac{q_z^2}{2E} \right), \quad b = \frac{1}{\delta'} \left( q_z - \delta' - \frac{q_z^2}{2E} + \frac{q_z^2 \delta'}{m^2} \right),$$

$q_z$  и  $q_\perp$  — компоненты  $\mathbf{q}$ , параллельная и ортогональные импульсу  $\mathbf{p}$  падающей частицы. Появление множителя  $\delta'/m^2 \sqrt{1-y^2}$  в (12.7) связано с якобианом перехода от переменных, определяющих телесные углы в формуле (12.5), к переменным  $\theta$  и  $\mathbf{q}$  (указанный переход подробно описан в работах [1, 22]).

Из положительности радикала (12.8) следует, что

$$q_z \geq \delta' + q_{\perp}^2/2E. \quad (12.9)$$

Рассмотрим некоторые предельные случаи формулы (12.7).

В области малых значений переданного импульса ( $q_{\perp} \ll m$ ) усредненное по поляризациям начальных частиц и просуммированное по поляризациям конечных частиц дифференциальное сечение излучения приобретает следующий вид:

$$d\sigma = \frac{e^2}{4\pi^3} \frac{E'}{E} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\delta'}{m^2} \frac{q_{\perp}^2}{q_z^2} d^3q \left[ 1 + \frac{\omega^2}{2EE'} - 2 \frac{\delta'}{q_z} \left( 1 - \frac{\delta'}{q_z} \right) \right] |U_q|^2. \quad (12.10)$$

Этой простой формулой удобно пользоваться для анализа процесса излучения быстрой частицы в поле  $U(r)$  в случае, когда характерные значения переданных при излучении импульсов малы по сравнению с  $m$ . Такая ситуация реализуется, например, в теории когерентного излучения релятивистских электронов в кристалле (см. гл. 4).

Если кроме условия  $q_{\perp} \ll m$  выполняется неравенство  $q_{\perp} \gg \delta'$ , то в (12.10) можно пренебречь зависимостью фурье-компоненты потенциальной энергии от  $q_z$ . Тогда после интегрирования по  $q_z$  сечение излучения может быть записано в виде

$$d\sigma = dw(q_{\perp}) \cdot d\sigma_e^{(B)}, \quad (12.11)$$

где  $d\sigma_e^{(B)}$  — сечение упругого рассеяния в первом борновском приближении (10.1), (10.12) и  $dw(q_{\perp})$  — вероятность излучения

$$dw(q_{\perp}) = \frac{2e^2}{3\pi} \frac{E'}{E} \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{\omega^2}{EE'} \right) \frac{q_{\perp}^2}{m^2} \frac{d\omega}{\omega}. \quad (12.12)$$

Рассмотрим более подробно случай  $q_{\perp} \gg \delta'$ , не предполагая при этом, что  $q_{\perp} \ll m$ . В этом случае в (12.10), как и при выводе формулы (12.11), можно пренебречь зависимостью  $U_q$  от  $q_z$ . Сечение тормозного излучения при этом имеет вид

$$d\sigma = dw(\mathbf{q}, y) \cdot d\sigma_e^{(B)}, \quad (12.13)$$

где

$$dw(\mathbf{q}, y) = \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{E'}{E} |M|^2 \frac{\delta'}{m^2} \frac{d\omega}{\omega} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} dq_z. \quad (12.14)$$

После усреднения по поляризациям начальных и суммирования по поляризациям конечных частиц и интегрирования по переменным  $y$  и  $q_z$  приходим к формуле (12.11) с

$$dw(q_{\perp}) = \frac{2e^2}{\pi} \frac{E'}{E} \frac{d\omega}{\omega} \left\{ \frac{2\xi^2 \left( 1 + \frac{\omega^2}{2EE'} \right) + 1}{\xi \sqrt{\xi^2 + 1}} \ln(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}) - 1 \right\}, \quad (12.15)$$

где  $\xi = q_{\perp}/2m$ .

При  $q_{\perp} \ll m$  эта формула переходит в (12.12); если же  $q_{\perp} \gg m$ , то

$$dw(q_{\perp}) = \frac{4e^2}{\pi} \frac{E'}{E} \frac{d\omega}{\omega} \left( 1 + \frac{\omega^2}{2EE'} \right) \ln \frac{q_{\perp}}{m}. \quad (12.16)$$

Формулой (12.11) удобно пользоваться при рассмотрении излучения быстрых частиц в случае, когда характерные значения переданных импульсов  $q_{\perp}$  велики по сравнению с характерными значениями продольной компоненты импульса  $q_z \sim \delta'$ . Это условие выполняется, например, при излучении частиц достаточно высокой энергии в поле атома, потенциал которого представляет собой экранированный потенциал Кулона (7.5).

Действительно, фурье-компонента потенциала (7.5) равна

$$U_q = 4\pi Ze |e| (q^2 + R^{-2})^{-1}. \quad (12.17)$$

Для такого потенциала определяющий вклад в сечение излучения дают значения  $m \gtrsim q_{\perp} \gtrsim R^{-1}$ . При этом, если энергия частицы будет достаточно велика, так что  $R^{-1} \gg \delta'$ , то сечение излучения может быть найдено с помощью формул (12.11), (12.15). В результате интегрирования по  $q_{\perp}$  приходим к формуле Бете и Гайтлера [1, 23] для сечения излучения быстрого электрона в поле атома

$$d\sigma_{\text{BH}} = \frac{4Z^2 e^6}{m^2} \frac{d\omega}{\omega} \left[ \left( 1 + \frac{E'^2}{E^2} - \frac{2}{3} \frac{E'}{E} \right) \ln 183 Z^{-1/3} + \frac{1}{9} \right]. \quad (12.18)$$

Приведенные выше формулы могут быть использованы и для описания процесса образования электронно-позитронных пар фотоном в поле атома. Этому процессу в первом порядке теории возмущений (борновское приближение) соответствуют две диаграммы, изображенные на рис. 2.3. На этих диаграммах  $p_+$  и  $p_-$  — 4-векторы позитрона и электрона образующейся пары,  $k$  — 4-импульс фотона и  $q = k - p_+ - p_-$ .

Диаграммы рис. 2.3 топологически эквивалентны диаграммам рис. 2.2, изображающим процесс излучения, поэтому сечение образования пары может быть получено из сечения

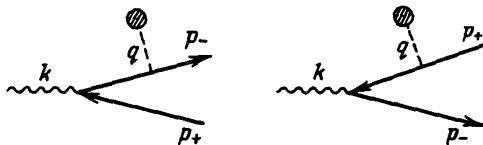


Рис. 2.3. Диаграммы, отвечающие процессу образования электронно-позитронной пары фотоном в первом борновском приближении

излучения (12.5) путем замен  $k \rightarrow -k$ ,  $p' \rightarrow p_-$ ,  $p \rightarrow -p_+$  и  $d^3k d^3p' \rightarrow d^3p_+ d^3p_-$ .



В случае малых передач импульса,  $q_{\perp} \ll m$ , для неполяризованных частиц получаем

$$d\sigma_{\pm} = \frac{e^2}{8\pi^3} \frac{dE_+ d^3q}{4\omega^2} \frac{q_{\perp}^2}{q_z^2} \left\{ \frac{E_-}{E_+} \left( 1 - \frac{E_+^2}{E_-^2} \right) + 4 \frac{\delta_{\pm}}{q_z} \left( 1 - \frac{\delta_{\pm}}{q_z} \right) \right\} |U_q|^2, \quad (12.19)$$

где  $q_z$  и  $q_{\perp}$  — компоненты переданного импульса, параллельная и ортогональная импульсу фотона  $\mathbf{k}$ , причем  $q_z \geq \delta_{\pm}$ ,  $\delta_{\pm} = \omega m^2 / 2E_- E_+$ ;  $U_q$  — фурье-компонента потенциала внешнего поля.

Если же  $q_{\perp} \gg \delta_{\pm}$ , то

$$d\sigma_{\pm} = \frac{e^2}{4\pi^3} \frac{E_+ E_-}{\omega^3} \left\{ \frac{2\xi^2 \left( \frac{\omega^2}{2E_- E_+} - 1 \right) - 1}{\xi \sqrt{\xi^2 + 1}} \ln(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}) - 1 \right\} \times |U_q|^2 dE_+ d^2q_{\perp}, \quad (12.20)$$

где  $\xi = q_{\perp} / 2m$ .

В поле отдельного атома, потенциал которого представляет собой экранированный потенциал Кулона (7.5), сечение образования пары при  $R^{-1} \gg \delta_{\pm}$  имеет вид [23]

$$d\sigma_{\pm} = \frac{4Z^2 e^6}{m^2} \frac{dE_+}{\omega^3} \left[ (E_-^2 + E_+^2 + \frac{2}{3} E_- E_+) \ln 183Z^{-1/3} - \frac{1}{9} E_- E_+ \right]. \quad (12.21)$$

### § 13. Понятие длины когерентности в квантовой теории

Выше, в § 4, мы ввели понятие длины когерентности исходя из рассмотрения процесса излучения в классической электродинамике. Эта длина определялась как расстояние вдоль импульса частицы, в пределах которого существенны интерференционные эффекты при излучении. Понятие длины когерентности естественным образом возникает и в квантовой теории. Как мы видели в предыдущем параграфе, сечение тормозного излучения в квантовой теории определяется матричным элементом (12.2), поэтому длину когерентности естественно связать с той областью пространства, которая вносит существенный вклад в матричный элемент.

Матричный элемент содержит под знаком интеграла по пространственным координатам множитель  $\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r})$ , где  $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}' - \mathbf{k}$  есть переданный импульс. Эта экспонента определяет эффективные значения  $\mathbf{r}$ , вносящие главный вклад в матричный элемент. В релятивистской области процесс излучения разыгрывается, в основном, вдоль импульса частицы  $\mathbf{p}$  (ось  $z$ ). Эффективная область координаты  $z$  очевидно равна

$z_{\text{eff}} \sim q_z^{-1}$ , а эффективная область расстояний, перпендикулярных  $p$ , равна  $\rho_{\text{eff}} \sim q_{\perp}^{-1}$ .

Из законов сохранения энергии и импульса при излучении (12.6) следует, что в релятивистском случае, когда векторы  $p$ ,  $p'$  и  $k$  почти параллельны друг другу,

$$q_{\text{min}} = p - p' - k \approx \frac{\omega m^2}{2EE'}. \quad (13.1)$$

Формула (12.10) показывает, что дифференциальное сечение излучения быстро убывает с ростом  $q_z$ , поэтому характерные значения  $q_z$  по порядку величины равны  $q_z \sim q_{\text{min}}$ . Таким образом, процесс излучения разыгрывается на длине вдоль импульса частицы, по порядку величины, равной [22]

$$l'_c = \frac{2EE'}{m^2 \omega}. \quad (13.2)$$

Эта формула и определяет длину когерентности в квантовой теории.

Покажем, что длина  $l'_c$  определяет размер пространственной области, в пределах которой проявляются когерентные эффекты при излучении. С этой целью рассмотрим излучение, которое происходит при столкновении электрона с цепочкой  $N$  атомов, расположенных вдоль импульса падающей частицы (см. рис. 2.1).

В первом борновском приближении матричный элемент процесса излучения (12.3) определяется фурье-компонентой потенциала внешнего поля. В случае цепочки атомов (11.1)

$$U_q^{(N)} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{i q_n a} u_q, \quad (13.3)$$

где  $u_q$  — фурье-компонента потенциала отдельного атома цепочки. Подставляя это выражение для  $U_q^{(N)}$  в (12.5), получим сечение излучения на цепочке атомов

$$d\sigma^{(N)} = \left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{i q_n a} \right|^2 d\sigma^{(1)}. \quad (13.4)$$

Это сечение только множителем отличается от сечения излучения на изолированном атоме  $d\sigma^{(1)}$ .

Характерные значения  $q_z$  по порядку величины равны  $\delta'$ , поэтому если расстояние между атомами в цепочке будет велико по сравнению с длиной когерентности ( $a \gg l'_c$ ), то перекрестными слагаемыми в двойной сумме в (13.4) можно пренебречь и сечение излучения на  $N$  атомах будет равно сумме сечений на  $N$  изолированных центрах:

$$d\sigma^{(N)} = N d\sigma^{(1)}, \quad l'_c \ll a. \quad (13.5)$$

Если же все  $N$  атомов цепочки будут находиться в пределах длины когерентности ( $l'_c \gg Na$ ; при достаточно

больших энергиях частицы это условие всегда может быть выполнено), то экспоненты в (13.3) можно положить равными единице. При этом матричный элемент процесса излучения будет пропорционален  $N$ , а сечение — пропорционально  $N^2$ :

$$d\sigma^{(N)} = N^2 d\sigma^{(1)}. \quad (13.6)$$

Наличие множителя  $N^2$  в этой формуле и является проявлением эффекта когерентности.

В отличие от классической формулы для длины когерентности в (13.1) входит множитель  $(1 - \omega/E)$ , содержащий энергию фотона  $\omega$ . Поэтому можно сказать, что квантовая формула для длины когерентности, в отличие от классической формулы, учитывает отдачу при излучении.

Множитель  $\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r})$  входит не только в матричный элемент процесса излучения, но и в матричные элементы таких процессов, как упругое рассеяние (10.2), образование электронно-позитронной пары (12.19) и др. Эти процессы в области высоких энергий также разыгрываются в основном вдоль импульса частицы, поэтому понятие длины когерентности может быть введено не только для тормозного излучения, но и для упругого рассеяния, и для образования электронно-позитронной пары и т. д. При этом конкретные выражения для длины когерентности будут различны для различных процессов, так как для этих процессов отличаются конкретные выражения законов сохранения энергии и импульса. Существенным, однако, является то, что в области высоких энергий длины когерентности всех этих процессов растут с энергией и при достаточно больших энергиях достигают макроскопических размеров. Так, в случае процесса упругого рассеяния продольный размер пространственной области, на которой развивается данный процесс, по порядку величины равен

$$l_e = \frac{1}{q_{\parallel}} = \frac{2E}{q_{\perp}^2}. \quad (13.7)$$

При заданном значении  $q_{\perp}$  и достаточно больших  $E$  эта длина может быть сколь угодно большой.

Длина  $l_e$  определяет размер пространственной области вдоль импульса частицы, в пределах которой необходимо учитывать интерференционные эффекты при рассеянии. Отметим, что в классической теории интерференционные эффекты при рассеянии отсутствуют, тогда как в квантовой теории они имеют место. Это связано с тем, что в квантовую теорию входит понятие волновой функции, тогда как в классической теории его нет.

Длину когерентности (13.1) можно интерпретировать также как длину, на которой происходит «отрыв» фотона от излучающего его электрона [24, 25]. Действительно, пусть электрон, сталкиваясь с атомом, излучает электромагнитную

волну с частотой  $\omega$ . Для ультрарелятивистской частицы излучение происходит в основном под малыми углами  $\theta \sim m/E$  к ее импульсу, поэтому рассмотрим излучение в направлении движения частицы.

Ясно, что сразу после столкновения с атомом излученная электроном электромагнитная волна (волновой пакет) не может достаточно далеко оторваться от него. Электрон и электромагнитную волну можно рассматривать как независимые объекты, только если они разойдутся друг относительно друга по крайней мере на расстояние порядка  $(\lambda + 1/p')$ , где  $p'$  — импульс конечного электрона и  $\lambda = 1/\omega$  — длина волны излученного фотона. Поскольку электрон и излученный им фотон движутся в одном направлении (рис. 2.4, а), то относительная скорость их разбегания будет  $v_{\text{отн}} \approx (1 - v')$ . Поэтому интервал времени, в течение которого фотон «отрывается» от электрона на расстояние порядка  $\lambda + 1/p'$ , будет равен

$$\Delta t = \frac{\lambda + 1/p'}{1 - v'} \approx \frac{2E'(E' + \omega)}{m^2\omega}.$$

Расстояние  $l'_c = v' \Delta t$ , которое проходит электрон за время  $\Delta t$ , совпадает с введенной ранее (13.2) длиной когерентности.

Аналогичные рассуждения справедливы и для процесса образования электронно-позитронной пары жестким фотоном в поле ядра. А именно, электрон и позитрон можно рассматривать как свободные частицы лишь в случае, когда эти частицы разлетятся друг относительно друга на расстояние, превышающее  $2/m$ . При высоких энергиях эти частицы вылетают, в основном, под малыми углами к импульсу фотона  $\theta_{\pm} \sim m/E_{\pm}$ , где  $E_+$  и  $E_-$  — энергии позитрона и электрона образующейся пары, поэтому прежде чем электрон и позитрон

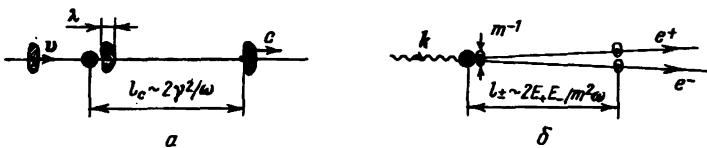


Рис. 2.4. «Отрыв» фотона от излучающей частицы (а) и разлет высокоэнергетической электронно-позитронной пары (б)

разлетятся на расстояние  $2/m$ , они пройдут путь, по порядку величины равный (см. рис. 2.4, б)

$$l_{\pm} = \frac{2E_- E_+}{m^2\omega}. \quad (13.8)$$

Величина  $l_{\pm}$  представляет собой длину, на которой формируется электронно-позитронная пара. Так как характерные значения энергий  $E_+$  и  $E_-$  частиц образующейся пары по порядку величины равны  $E_+ \sim E_- \sim \omega/2$ , то  $l_{\pm} \sim \omega/2m^2$ , и,

следовательно, при достаточно больших  $\omega$  эта длина может стать сколь угодно большой.

Обратим внимание на то, что длина  $l_{\pm}$  имеет ту же структуру, что и длина когерентности  $l'_c$  в процессе излучения: различие заключается лишь в том, что начальная и конечная энергии электрона в процессе излучения заменяются здесь значениями энергий электрона и позитрона образующейся пары.

#### § 14. Сечения излучения и образования электронно-позитронных пар в эйкональном приближении

При высоких энергиях длина, на которой формируется излучение ультрарелятивистского электрона, имеет макроскопический размер. В пределах этой длины электрон может столкнуться с большим числом атомов среды. При этом могут быть выполнены условия, при которых все атомы, находящиеся в пределах длины когерентности, будут выступать как один центр с эффективным зарядом  $Z_{\text{eff}} \sim NZ|e|$ . Такая ситуация имеет место, например, в случае, когда электрон сталкивается в пределах длины когерентности с цепочкой  $N$  атомов, расположенных вдоль импульса падающей частицы на расстоянии  $a$  друг от друга. Тогда эффективной константой взаимодействия частицы с цепочкой будет выступать не  $Ze^2/\hbar v$ , а величина  $NZe^2/\hbar v$ . При этом условие применимости первого борновского приближения принимает вид

$$\frac{NZe^2}{\hbar v} \ll 1. \quad (14.1)$$

Ясно, что при больших значениях  $N$  это условие нарушается. Поэтому важно знать роль высших борновских приближений в процессе излучения.

Исследуем этот вопрос, используя эйкональную волновую функцию быстрой частицы во внешнем поле (9.24). При высоких энергиях поправки к этой функции пропорциональны  $p^{-1}$ , поэтому можно ожидать, что в этом случае поправки к сечению излучения в эйкональном приближении будут малы.

Заметим предварительно, что непосредственная подстановка эйкональной волновой функции в матричный элемент (12.2) еще не решает проблему. Дело в том, что продольные расстояния вдоль импульса частицы, дающие главный вклад в матричный элемент (12.2), по порядку величины равны длине когерентности  $l'_c$ , поэтому необходимо, чтобы поправки к эйкональной волновой функции были малы в пределах этой длины. Подставляя в неравенствах (9.21), определяющих условия применимости эйконального приближения, вместо  $z$  длину когерентности  $l'_c = 2EE'/m^2\omega$  и замечая, что  $\rho^{-1}$  определяет по порядку величины значение импульса  $q_{\perp}$ , переданного

внешнему полю,  $\hbar/\rho \sim q_{\perp}$ , приходим к следующему условию на  $q_{\perp}$ :

$$\frac{2E'}{\hbar\omega} \left( \frac{q_{\perp}}{m} \right)^2 \ll 1. \quad (14.2)$$

Таким образом, непосредственное вычисление матричного элемента (12.2) с использованием эйкональной волновой функции оправдано только в области малых значений  $q_{\perp}$ . Из результатов борновского приближения, однако, вытекает (см. § 12), что основной вклад в сечение излучения дают значения  $\hbar/R \lesssim q_{\perp} \lesssim m$ . Но при  $q_{\perp} \sim m$  неравенство (14.2) нарушается и, следовательно, непосредственная подстановка эйкональной волновой функции в (12.2) не может дать правильного выражения для матричного элемента.

Матричный элемент необходимо предварительно преобразовать таким образом, чтобы в подынтегральное выражение непосредственно входил потенциал внешнего поля. Тогда, если размер пространственной области  $z_{\text{eff}}$  вдоль импульса частицы, в которой потенциал внешнего поля отличен от нуля, будет мал по сравнению с длиной когерентности  $l'_c$ , то обрезание интеграла по координате  $z$  будет определяться не длиной когерентности (осцилляциями экспоненциального фактора), а величиной  $z_{\text{eff}}$  (в случае потенциала отдельного атома  $z_{\text{eff}} \sim R$ ) и, следовательно, при высоких энергиях в интересующей области переданных импульсов ( $\hbar/R \lesssim q_{\perp} \lesssim m$ ) условия применимости эйконального приближения (9.21) всегда могут быть выполнены.

Такое представление матричного элемента (12.2) легко выполнить, воспользовавшись диаграммным тождеством, изображенным на рис. 2.5, где внешние линии в вершинах с внеш-

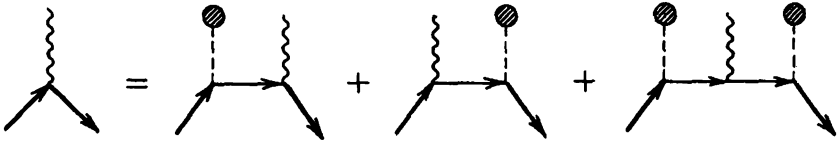


Рис. 2.5. Диаграммное тождество для матричного элемента процесса излучения

ним полем — точные волновые функции частицы во внешнем поле, а тонкие — волновые функции и функции Грина для свободной частицы. При выполнении условия

$$l'_c \gg z_{\text{eff}} \quad (14.3)$$

вклад третьего слагаемого (рис. 2.5) в матричный элемент мал по сравнению с вкладом первых двух слагаемых, причем степень малости этого слагаемого определяется параметром  $z_{\text{eff}}/l'_c$ . Поэтому с точностью до членов порядка  $z_{\text{eff}}/l'_c$  матричный элемент может быть записан в виде диаграмм, представленных на рис. 2.6 [26].

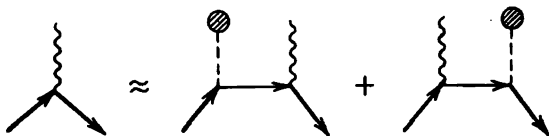


Рис. 2.6. Приближенное представление матричного элемента процесса излучения при  $l' \gg z_{\text{eff}}$

Подставляя сюда эйкональную волновую функцию, находим, что с точностью до членов, пропорциональных  $p^{-1}$ ,

$$M_{fi} = \frac{2\pi}{ip} M a(\mathbf{q}_\perp), \quad (14.4)$$

где  $M$  — спинорная структура матричного элемента, определяемая формулой (12.4), и  $a(\mathbf{q}_\perp)$  — эйкональная амплитуда упругого рассеяния (10.5).

Таким образом, при выполнении условия  $l'_c \gg z_{\text{eff}}$  сечение излучения приобретает вид

$$d\sigma(\mathbf{q}, y) = dw(\mathbf{q}, y) \cdot d\sigma_e, \quad (14.5)$$

где  $dw(\mathbf{q}, y)$  — вероятность излучения, определяемая соотношением (12.14), и  $d\sigma_e$  — сечение упругого рассеяния в эйкональном приближении.

Мы видим, что в рассматриваемом случае сечение излучения распадается на вероятность излучения и сечение упругого рассеяния. Заметим, что, вообще говоря, в произвольном внешнем поле такая факторизация не имеет места — она происходит только при выполнении условия (14.3).

Формула для  $dw(\mathbf{q}, y)$  в (14.5) совпадает с соответствующей формулой в борновском приближении. Учитывая это, а также то, что  $d\sigma_e$  не зависит от переменных  $q_z$  и  $y$ , получим после суммирования по поляризациям всех конечных частиц и усреднения по поляризациям начальных частиц и интегрирования по  $q_z$  и  $y$  следующее выражение для сечения:

$$d\sigma(q_\perp) = dw(q_\perp) d\sigma_e(q_\perp), \quad (14.6)$$

где  $dw(q_\perp)$  определяется формулой (12.15).

Рассмотрим некоторые предельные случаи (14.6).

При  $|\chi_0| \ll \hbar$  в выражении для сечения рассеяния можно выполнить разложение экспоненты  $\exp(i\chi_0/\hbar)$ . В первом приближении такого разложения формула (14.6) дает результат первого борновского приближения для сечения излучения (12.11).

Если же  $|\chi_0| \gg \hbar$ , то согласно (10.17)  $d\sigma_e = 2\pi p dp$  и, следовательно,

$$d\sigma = 2\pi p dp dw(q_\perp)|_{q_\perp = v\chi_0}. \quad (14.7)$$

Домножив  $d\sigma$  на  $\hbar\omega$ , получим эффективное излучение  $d\mathcal{X} = \hbar\omega d\sigma$ . При  $\hbar\omega \ll E$  и  $|\chi_0| \gg \hbar$  в классическом пределе,

когда можно пренебречь отдачей при излучении и движение частицы во внешнем поле можно трактовать в терминах классической механики, формула  $d\mathcal{N} = \hbar\omega d\sigma$  с учетом (14.7) дает соответствующий результат классической теории излучения.

Таким образом, формула (14.6) позволяет исследовать вклад высших борновских приближений в сечение излучения быстрых частиц во внешнем поле и исследовать переход от формулы борновского приближения к формуле классической теории излучения.

Величина  $\chi_0$  при столкновении ультррелятивистского электрона с атомом по порядку величины равна  $|\chi_0| \sim Ze^2$ . Так как для всех известных элементов  $Ze^2/\hbar v < 1$ , то может сложиться впечатление, что анализ классического предела формулы (14.6) не имеет практического интереса. Но это не так. Дело в том, что при выводе этой формулы не использован конкретный вид потенциала внешнего поля; требовалось только, чтобы область действия на частицу этого поля была мала по сравнению с длиной когерентности. В частности, в пределах длины когерентности электрон может столкнуться с большим числом атомов. При этом входящая в (14.6) величина  $\chi_0^{(N)}$  будет представлять собой сумму значений  $\chi_0$  для отдельных атомов и, следовательно,  $\chi_0^{(N)}$  может быть сколь угодно большой.

Рассмотрим в качестве примера излучение быстрого электрона при столкновении с цепочкой  $N$  атомов, расположенных на расстоянии  $a$  друг от друга вдоль импульса падающей частицы  $\mathbf{p}$  [13]. Потенциал отдельного атома цепочки будем считать экранированным кулоновским. Если выполняется условие  $l'_c \gg Na$ , то сечение излучения будет определяться формулой (14.6) с величиной  $\chi_0^{(N)}$ , равной

$$\chi_0^{(N)} = 2NZe|e|K_0(\rho/R), \quad (14.8)$$

где  $K_0(x)$  — модифицированная функция Ханкеля.

Для такого потенциала сечение излучения можно вычислить аналитически.

Если выполняется условие  $NZe^2/mR \ll 1$ , то после интегрирования по  $\rho$  и  $q_{\perp}$  находим, что

$$\begin{aligned} \frac{\hbar\omega d\sigma^{(N)}}{d\omega} &= \frac{16e^2}{3} \left( \frac{NZe^2}{mR} \right)^2 \frac{E'}{E} \left\{ \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{\hbar^2\omega^2}{EE'} \right) \times \right. \\ &\times \left[ \ln \frac{mR}{\hbar} + \frac{1}{2} - \left( \frac{NZe^2}{\hbar v} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \left( n^2 + \left( \frac{NZe^2}{\hbar v} \right)^2 \right)^{-1} \right] + \frac{1}{12} \left. \right\}. \quad (14.9) \end{aligned}$$

Эта формула по существу совпадает с известной формулой Бете—Максимона [27, 28] для сечения излучения электрона на отдельном экранированном кулоновском центре, полученной в приближении Фарри—Зоммерфельда—Мауэ [29, 30].



Следует лишь в формуле Бете — Максимова заменить заряд ядра  $Z|e|$  на  $NZ|e|$ . Мы видим, что в процессе излучения при  $l'_c \gg Na$  вся цепочка атомов ведет себя как один центр с эффективным зарядом  $NZ|e|$ .

При  $NZe^2/\hbar v \ll 1$  формула (14.9) переходит в результат борновского приближения. При этом сечение излучения пропорционально  $N^2$ , т. е. излучение носит когерентный характер.

Если же  $NZe^2/\hbar v \gg 1$ , но по-прежнему  $NZe^2/mR \ll 1$ , то суммируемая в (14.9) функция будет плавно изменяться с ростом  $n$ . Заменяя эту сумму на интеграл, находим, что

$$\frac{\hbar\omega d\sigma^{(N)}}{d\omega} = \frac{16e^2}{3} \left(\frac{NZe^2}{m}\right)^2 \frac{E'}{E} \left\{ \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\hbar^2 \omega^2}{EE'}\right) \left[ \ln \frac{mR}{NZe^2} - G + \frac{1}{2} \right] + \frac{1}{12} \right\}, \quad (14.10)$$

где  $G=0,577$  — постоянная Эйлера.

Формула (14.10) показывает, что квантовый характер процесса излучения при  $|\chi_0^{(N)}| \gg \hbar$  появляется только в эффекте, связанном с отдачей при излучении. Движение же частицы во внешнем поле в этом случае можно описывать классически. Формула (14.10) показывает также, что в рассматриваемом предельном случае сечение излучения пропорционально  $N^2$ . Таким образом, излучение носит когерентный характер как при квантовом ( $NZe^2/\hbar v \ll 1$ ), так и при классическом ( $NZe^2/\hbar v \gg 1$ ) рассмотрении движения частицы в поле цепочки.

При  $NZe^2/mR \gg 1$  формулы (14.9) и (14.10) несправедливы. Непосредственное интегрирование общего выражения (14.6) для сечения излучения приводит в этом случае к

$$\frac{\hbar\omega d\sigma^{(N)}}{d\omega} = \frac{4e^2 R^2}{3} \frac{E'}{E} \left(1 + \frac{\hbar^2 \omega^2}{2EE'}\right) \left(\ln \frac{NZe^2}{mR}\right)^3. \quad (14.11)$$

Мы видим, что в этом случае когерентный характер излучения быстрых частиц в поле цепочки атомов нарушается, причем интенсивность излучения практически не зависит от числа соударений частицы с атомами цепочки. Величина  $NZe^2/mR$  представляет собой отношение характерного угла рассеяния электрона цепочкой  $\vartheta \sim NZe^2/ER$  к характерному значению угла излучения релятивистского электрона  $\theta \sim m/E$ . Таким образом, когерентные эффекты при излучении проявляются только при  $\vartheta < m/E$ ; при выполнении же противоположного условия имеет место эффект подавления когерентного излучения.

Отметим, что вывод об изменении характера излучения ультрарелятивистского электрона при  $\vartheta \sim m/E$  является общим и не зависит от того, в каком поле происходит излучение. Связано это с тем, что формула (14.6) получена без использования конкретного вида потенциала внешнего поля, поэтому ею можно пользоваться при изучении излучения в различных

полях, таких как аморфная среда [31], кристалл [13], кусочно неоднородное внешнее поле [32] и т. п., требуется только выполнение условия (14.3).

Аналогичные формулы нетрудно получить и для сечения образования электронно-позитронной пары фотоном во внешнем поле. Так, если длина когерентности этого процесса  $l_{\pm} = 2E_{+}E_{-}/m^2\omega$  будет велика по сравнению с размером пространственной области  $z_{\text{eff}}$  вдоль импульса фотона, в которой потенциал внешнего поля отличен от нуля,

$$l_{\pm} \gg z_{\text{eff}}, \quad (14.12)$$

то в эйкональном приближении сечение образования пары может быть представлено в виде [33]

$$d\sigma_{\pm}(q_{\perp}) = dw_{\pm}(q_{\perp})d\sigma_e, \quad (14.13)$$

где  $dw_{\pm}$  — вероятность перехода фотона в электронно-позитронную пару с передачей паре поперечной составляющей импульса, равного  $q_{\perp}$ ,

$$dw_{\pm} = \frac{2e^2 E_{-}E_{+}}{\pi \omega^2} \frac{dE_{+}}{\omega} \left\{ \frac{2\xi^2 \left( \frac{\hbar^2 \omega^2}{2E_{-}E_{+}} - 1 \right) - 1}{\xi \sqrt{\xi^2 + 1}} \ln(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}) - 1 \right\}; \quad (14.14)$$

здесь  $\xi = q_{\perp}/2m$  и  $d\sigma_e(q_{\perp})$  — сечение упругого рассеяния одной из частиц пары во внешнем поле (10.1), (10.5). Заметим, что в рассматриваемый процесс существенный вклад дают все три диаграммы, приведенные на рис. 2.5.

Рассмотрим теперь образование электронно-позитронной пары фотоном высокой энергии в поле цепочки  $N$  атомов, расположенных вдоль импульса фотона [34]. Сечение этого процесса при достаточно высокой энергии фотона, когда выполняется условие  $l_{\pm} \gg Na$ , может быть получено по формуле (14.13). Подставляя в эту формулу значение  $\chi_0^{(N)}$ , определяемое соотношением (14.9), находим, что при  $NZe^2/mR \ll 1$

$$\frac{\hbar\omega d\sigma_{\pm}}{dE_{+}} = \frac{16e^2}{3} \left( \frac{NZe^2}{m} \right)^2 \frac{E_{-}E_{+}}{\omega^2} \left\{ \left( \frac{3}{4} \frac{\hbar^2 \omega^2}{E_{-}E_{+}} - 1 \right) \times \right. \\ \left. \times \left[ \ln \left( \frac{mR}{\hbar} \right) + \frac{1}{2} - \left( \frac{NZe^2}{\hbar} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \left( n^2 + \left( \frac{NZe^2}{\hbar} \right)^2 \right)^{-1} \right] - \frac{1}{12} \right\}. \quad (14.15)$$

Если же  $NZe^2/mR \gg 1$ , то

$$\frac{\omega d\sigma_{\pm}}{dE_{+}} = \frac{4e^2 R^2}{3} \frac{E_{-}E_{+}}{\omega^2} \left( \frac{\hbar^2 \omega^2}{2E_{-}E_{+}} - 1 \right) \left( \ln \frac{NZe^2}{mR} \right)^3. \quad (14.16)$$

Формула (14.15) показывает, что при выполнении условия  $NZe^2/mR \ll 1$  сечение образования пары пропорционально квадрату числа атомов в цепочке, т. е. процесс в этом случае

носит когерентный характер. Если же  $NZe^2/mR \gg 1$ , то, согласно (14.16), квадратичная зависимость сечения от  $N$  заменяется более слабой — логарифмической.

Таким образом, при взаимодействии частиц высоких энергий с цепочкой атомов когерентный эффект возможен не только в процессах рассеяния (см. § 11) и излучения, но и в процессе образования электронно-позитронных пар, причем в процессах излучения и образования пар этот эффект сохраняется при существенно больших значениях  $N$ , чем в процессе рассеяния. В заключение отметим, что аналогичные результаты справедливы и в случае, когда электронно-позитронная пара образуется не фотоном, а заряженной частицей [34].

### § 15. Учет квантовой поправки к интенсивности синхротронного излучения

Как мы видели в предыдущем параграфе, интенсивность излучения в квантовой теории отличается от интенсивности излучения в классической теории и переходит в нее при  $\hbar \rightarrow 0$ . Мы покажем, что в этом случае имеет место два типа квантовых эффектов — эффект, связанный с квантовым характером самого движения частицы во внешнем поле, и эффект, связанный с отдачей испытываемой частицей при излучении. Оба эти эффекта, конечно, связаны между собой, но в области высоких энергий, как будет показано ниже, оба они могут быть разделены. Более того, первый из этих эффектов, который можно описать как эффект, связанный с некоммутативностью операторов, сопоставляемых классическим величинам (т. е. операторов импульса частицы, энергии, скорости и т. д.), оказывается менее существенным, чем эффект отдачи при излучении. Эта возможность разделения квантовых эффектов показывает, что при изучении излучения в области высоких энергий целесообразным является преобразование матричного элемента к виду, содержащему операторы, характеризующие движение частицы. Иными словами целесообразным является преобразование матричного элемента к виду, содержащему гейзенберговские операторы, соответствующие динамическим переменным. Такая задача впервые была решена Швингером [35] при нахождении квантовой поправки к классической формуле для интенсивности синхротронного излучения.

Мы изложим здесь операторный метод Швингера, учитывая, что он дает возможность выделения эффекта, связанного с отдачей при излучении, на фоне других квантовых эффектов. В самой работе [35] была найдена только первая квантовая поправка к интенсивности синхротронного излучения порядка  $\hbar\omega/E$  (здесь  $\omega$  — частота излучения и  $E$  — энергия частицы). В дальнейшем в работах Байера и Каткова [36, 37] на

основе операторного метода была найдена формула для интенсивности излучения, справедливая и при  $\hbar\omega \sim E^*$ ).

Для простоты изложения будем рассматривать излучение бесспиновой частицы. Такой подход оправдывается тем, что, как будет показано в § 17, спин оказывается несущественным при учете только первой квантовой поправки.

В квантовой электродинамике, как известно [1], взаимодействие частицы с электромагнитным полем описывается  $S$ -матрицей, элементы которой определяют амплитуды вероятностей различных процессов. Взаимодействие частицы с полем излучения мы будем рассматривать по теории возмущений, тогда как взаимодействие с внешним полем будет учитываться точно, без применения теории возмущений по этому полю. Представление  $S$ -матрицы, в котором внешнее поле учитывается точно, носит название представления Фарри.  $S$ -матрица в этом представлении строится по образцу построения  $S$ -матрицы для свободных частиц с той разницей, что входящие в последнюю волновые функции свободных частиц должны быть заменены на точные волновые функции частиц в заданном поле. В первом порядке теории возмущений по взаимодействию частицы с полем излучения  $S$ -матрица имеет следующий вид [1, 37]:

$$S^{(1)} = -ie \int d^4x A_\mu(x) J_\mu(x), \quad (15.1)$$

где  $J_\mu$  — оператор плотности тока в заданном внешнем поле:

$$J_\mu = \Phi^* (P_\mu \Phi) - (P_\mu \Phi^*) \Phi, \quad (15.2)$$

$\Phi$  — оператор поля частиц.

Матричный элемент процесса излучения при этом может быть записан в виде

$$\langle f | S^{(1)} | i \rangle = -\frac{ie\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\hbar\omega}} M_{fi}, \quad (15.3)$$

$$M_{fi} = \frac{1}{\sqrt{E_i E_f}} \int dt d^3r e^{i\omega t} \varphi_f^*(\mathbf{eP}, e^{-i\mathbf{k}r}) \varphi_i, \quad (15.4)$$

где  $\mathbf{e}$  — вектор поляризации фотона;  $\mathbf{P} = -i\hbar \nabla - e\mathbf{A}$  — оператор обобщенного импульса частицы;  $(A, B) = \frac{1}{2}(AB + BA)$  — симметризованное произведение операторов  $A$  и  $B$ ;  $\varphi_i$  и  $\varphi_f$  — волновые функции частицы в заданном внешнем поле, нормированные соотношением

$$\int d^3r \varphi^* \varphi = 1.$$

---

\* Первая квантовая поправка к классической формуле для интенсивности синхротронного излучения впервые была получена в работе Соколова, Клепикова и Тернова [38] без использования операторного метода; полное решение квантовой задачи о магнитотормозном излучении впервые дано Клепиковым [39].

Волновые функции  $\varphi_i$  и  $\varphi_f$ , соответствующие начальному и конечному состояниям излучающей частицы, являются решениями уравнения Клейна—Гордона в данном поле с энергиями  $E_i$  и  $E_f$  соответственно. При движении частицы в магнитном поле это уравнение имеет вид

$$\left[ \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - (i\hbar \nabla + e\mathbf{A})^2 - m^2 \right] \varphi = 0, \quad (15.5)$$

где  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал магнитного поля.

Формально решение уравнения (15.5) может быть записано в виде

$$\varphi = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H} t\right) |i\rangle, \quad (15.6)$$

где  $\mathcal{H} = \sqrt{(i\hbar \nabla + e\mathbf{A})^2 + m^2}$  — гамильтониан, определяющий движение частицы в поле  $A$  и  $|i\rangle$  — состояние частицы в этом поле при  $t=0$  с заданным значением энергии  $E_i$ , так что

$$e^{-i\mathcal{H}t/\hbar} |i\rangle = e^{-iE_i t/\hbar} |i\rangle.$$

Такое представление волновых функций позволяет выполнить в матричном элементе (15.4) унитарное преобразование к гейзенберговскому представлению операторов. При этом матричный элемент (15.4) удобно записать в виде

$$M_{fi} = \int dt e^{i\omega t} \langle f | Q(t) | i \rangle, \quad (15.7)$$

где

$$Q(t) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H}}} (\mathbf{eP}, e^{-i\mathbf{kr}(t)}) \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H}}}. \quad (15.8)$$

Здесь  $\mathbf{P}(t)$  и  $\mathbf{r}(t)$  — гейзенберговские операторы импульса и координаты, определяемые соотношениями

$$A(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{H} t\right) A \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H} t\right). \quad (15.9)$$

Покажем, что с учетом первой квантовой поправки, определяющей отдачу при излучении, оператор  $Q(t)$  приближенно совпадает с оператором

$$Q_s(t) = (\mathbf{e}\hat{\mathbf{v}}(t), e^{-i\mathbf{kr}(t)}), \quad (15.10)$$

где  $\hat{\mathbf{v}}(t)$  — оператор скорости частицы. Матричный элемент с таким выражением для  $Q_s(t)$  был использован в работе [35]. Это выражение соответствует формальной замене в классической формуле для интенсивности излучения заряженной частицы (3.2) скорости и координаты на соответствующие операторы и последующей симметризации полученного результата.

Для того чтобы показать это, рассмотрим коммутационные соотношения входящих в (15.8) и (15.10) операторов. Прежде

всего определим связь между операторами  $\hat{\mathbf{p}}(t)$  и  $\hat{\mathbf{v}}(t)$ . Учитывая соотношения

$$i\hbar \dot{\mathbf{r}} = i\hbar \hat{\mathbf{v}} = [\mathbf{r}, \mathcal{H}], \quad [\mathbf{r}, \mathcal{H}^2] = 2i\hbar \hat{\mathbf{p}},$$

имеем

$$\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{p}} \mathcal{H}^{-1} + \frac{i\hbar}{2} \dot{\hat{\mathbf{v}}} \mathcal{H}^{-1}. \quad (15.11)$$

Из (15.11) вытекает, что в первом приближении по  $\hbar$

$$\hat{\mathbf{v}} \approx \hat{\mathbf{p}} \mathcal{H}^{-1}. \quad (15.11a)$$

Отброшенные при этом члены по порядку величины равны  $e\hbar|\mathbf{H}|E^{-2}$ , где  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$  — напряженность магнитного поля. С таким значением  $\hat{\mathbf{v}}(t)$  формулы (15.8) и (15.10) для  $Q(t)$  и  $Q_s(t)$  отличаются друг от друга только порядком входящих в них операторов.

Замечая далее, что

$$i\hbar \dot{\mathbf{p}} = [\mathbf{p}, \mathcal{H}] = -i\hbar e \mathbf{H} \times \mathbf{p} \mathcal{H}^{-1},$$

видим, что с той же точностью операторы  $\mathbf{p}$  и  $\mathcal{H}$  можно считать коммутирующими.

Таким образом, некоммутативность операторов, определяющих динамику частицы в заданном внешнем поле, характеризуется параметром

$$e\hbar|\mathbf{H}|E^{-2}, \quad (15.12)$$

и, следовательно, с точностью до членов такого порядка величины порядок операторов  $\hat{\mathbf{p}}$ ,  $\mathcal{H}$  и  $\hat{\mathbf{v}}$  несуществен.

Определим теперь перестановочные соотношения для оператора  $\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t))$ , определяющего излученное поле, с операторами  $\mathcal{H}$ , определяющими динамику частицы во внешнем поле. Заметим в этой связи, что оператор  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$  представляет собой оператор сдвига в импульсном пространстве

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} f(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (15.13)$$

где  $f(\mathbf{p})$  — некоторая функция  $\mathbf{p}$ . Поэтому, в частности,

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathcal{H}(\mathbf{p}) = \mathcal{H}(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (15.14)$$

и, следовательно, в первом приближении по  $\hbar$

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathcal{H} \approx (\mathcal{H} + \hbar\mathbf{k}\hat{\mathbf{v}}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (15.14a)$$

Формула (15.14a) показывает, что некоммутативность операторов  $\mathcal{H}$  и  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$  определяется параметром  $\hbar\mathbf{k}\mathbf{v}E^{-1}$ . Учитывая, что характерные значения углов излучения малы,  $\theta \sim m/E$  и что  $v \approx 1$ , получаем

$$\frac{\hbar\mathbf{k}\mathbf{v}}{E} \approx \frac{\hbar\omega}{E}. \quad (15.15)$$

Этот параметр определяет отдачу при излучении.

Характерные частоты излучения ультрарелятивистской частицы в магнитном поле порядка  $\omega \sim e|\mathbf{H}|\gamma^2/m$  (см. § 5). В этой области частот

$$\frac{\hbar\omega}{E} \sim \frac{\hbar e|\mathbf{H}|}{E^2} \gamma^3. \quad (15.15a)$$

Таким образом, при высоких энергиях ( $E \gg m$ ) параметр, определяющий отдачу при излучении, оказывается много большим параметра, определяющего квантовые эффекты при движении частицы в магнитном поле и, следовательно, при вычислении первой квантовой поправки в матричном элементе (15.8) можно пренебречь некоммутативностью динамических переменных по сравнению с коммутаторами между динамическими переменными и оператором  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ . Иными словами, при высоких энергиях эффект отдачи при излучении может быть выделен на фоне эффектов, определяющих квантовый характер движения частицы во внешнем поле.

На основании сказанного, перенося оператор  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$  в матричных элементах (15.8) и (15.10) налево, получим с учетом первой квантовой поправки

$$Q(t) \approx Q_s(t) \approx e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathbf{e}\mathbf{v}(t) \left(1 + \frac{\hbar\omega}{\mathcal{H}}\right). \quad (15.16)$$

Представление матричного элемента в виде (15.7) удобно, так как оно позволяет в общем виде выполнить в формуле (12.1) для вероятности излучения суммирование по конечным состояниям. При этом информация о конечном состоянии переносится на оператор  $\mathcal{H}^{-1/2} \exp(i\mathcal{H}t/\hbar)$ .

Подставляя (15.7) в (12.1), получим

$$dw = \frac{e^2}{\hbar\omega} \frac{d^3k}{4\pi^2} \int dt dt' e^{i\omega(t-t')} \sum_f \langle i | Q^+(t) | f \rangle \langle f | Q(t) | i \rangle.$$

Учитывая условие полноты

$$\sum_f |f\rangle \langle f| = 1,$$

приходим к следующей формуле для вероятности излучения:

$$dw = \frac{e^2}{\hbar\omega} \frac{d^3k}{4\pi^2} \int dt dt' e^{i\omega(t-t')} \langle i | Q^+(t) Q(t') | i \rangle. \quad (15.17)$$

Если порядок операторов (19.17) несуществен, то формула (15.17) дает соответствующий результат классической теории излучения (3.2), в котором отдача при излучении не учитывается (интенсивность излучения  $d\mathcal{E}$  связана с вероятностью излучения соотношением  $d\mathcal{E} = \hbar\omega dw$ ).

Подставляя в (15.17) оператор  $Q(t)$ , определяемый соотношением (15.16), получим вероятность излучения с учетом первой квантовой поправки:

$$dw = \frac{e^2}{\hbar\omega} \frac{d^3k}{4\pi^2} \left(1 + \frac{\hbar\omega}{E}\right) \int dt dt' e^{i\omega(t-t')} \langle i | e^* \mathbf{v} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \bar{\mathbf{e}}^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \mathbf{e}\mathbf{v}' | i \rangle, \quad (15.18)$$

где  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ,  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}(t')$  и  $E = E_i$ .

Входящие в (15.18) операторы  $\mathbf{r}(t)$  и  $\mathbf{r}(t')$ , взятые в разные моменты времени, не коммутируют между собой, поэтому при вычислении матричного элемента (15.18) необходимо знать коммутационные соотношения для этих операторов. Предварительно выполним в (15.18) замены переменных  $t \rightarrow t + \tau/2$ ,  $t' \rightarrow t - \tau/2$ . Тогда

$$dw = \frac{e^2}{\hbar\omega} \frac{d^3k}{4\pi^2} \left(1 + \frac{\hbar\omega}{E}\right) \int dt \times \\ \times dt e^{i\omega\tau} \langle i | \mathbf{v}(t + \tau/2) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t + \tau/2)} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t - \tau/2)} \mathbf{v}(t - \tau/2) | i \rangle. \quad (15.18a)$$

Воспользуемся теперь для произведения операторов  $\exp(iA) = \exp[i\mathbf{k}\mathbf{r}(t + \tau/2)]$  и  $\exp(-B) = \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t - \tau/2))$  известным соотношением

$$e^A e^B = e^{A+B} \cdot e^{\frac{1}{2}[A,B]}, \quad (15.19)$$

которое является точным, если  $[A, B]$  коммутирует с  $A$  и с  $B$ . В рассматриваемом случае, как будет показано ниже, коммутатор  $[A, B]$  пропорционален  $\hbar$ , поэтому с требуемой точностью можно пренебречь некоммутативностью с  $[A, B]$  операторов  $A$  и  $B$  и воспользоваться соотношением (15.19) для вычисления вероятности (15.18a). Отброшенные при этом члены будут пропорциональны  $\hbar^2$ .

В области частот  $\omega \sim \omega_0 \gamma^3$  значения  $\tau$ , дающие главный вклад в интеграл по  $\tau$  в (15.18a), такие, что

$$\omega\tau(1 - v^2) \sim \omega_0 \tau \gamma \sim 1,$$

где  $\omega_0 = e|\mathbf{H}|E^{-1}$  — частота вращения частицы в магнитном поле, поэтому  $\omega_0 \tau \ll 1$ , и, следовательно, могут быть использованы разложения

$$\mathbf{r}\left(t \pm \frac{\tau}{2}\right) \approx \mathbf{r}(t) \pm \frac{\tau}{2} \dot{\mathbf{r}}(t) + \frac{\tau^2}{8} \ddot{\mathbf{r}}(t) \pm \frac{\tau^3}{48} \dddot{\mathbf{r}}(t).$$

Из уравнения движения (1.7) вытекает, что в рассматриваемом случае

$$\ddot{\mathbf{v}} = -\omega_0^2 \mathbf{v}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{r}\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \mathbf{r}\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \approx \left(\tau - \frac{1}{24} \omega_0^2 \tau^3\right) \mathbf{v}(t)$$



и

$$[A, B] = -\tau [\mathbf{k}\mathbf{r}, \mathbf{k}\mathbf{v}] - \frac{\tau^3}{24} [\mathbf{k}\mathbf{r}, \omega_0^2 \mathbf{k}\mathbf{v}].$$

Входящие сюда коммутаторы определяются соотношениями

$$[r_k, v_j] = i\hbar \frac{\partial v_j}{\partial p_k} = \frac{i\hbar}{E} (\delta_{kj} - v_k v_j),$$

$$[r_k, \mathcal{H}^{-2} v_j] = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{v_j}{E^2} = i\hbar E^{-3} (\delta_{kj} - 3v_k v_j).$$

Учитывая, что характерные значения углов излучения  $\theta \sim m/E$ , имеем

$$[A, B] = -2i \frac{\hbar\omega}{E} \omega \left\{ (1 - \mathbf{n}\mathbf{v}) \tau + \frac{1}{24} \omega_0^2 \tau^3 \right\}. \quad (15.20)$$

Предэкспоненциальный фактор в (15.18а) равен

$$\mathbf{v} \left( t + \frac{\tau}{2} \right) \mathbf{v} \left( t - \frac{\tau}{2} \right) - 1 \approx - \left( 1 - \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} \tau^2 \omega_0^2 \right).$$

Подставляя полученные соотношения в (15.19) и (15.18а), после суммирования по поляризациям фотона приходим к следующей формуле для отнесенной к единице времени вероятности излучения

$$\frac{dw}{dt d\omega d\sigma} = -\frac{e^2}{4\pi^2} \omega \left( 1 + \frac{\hbar\omega}{E} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left( 1 - \mathbf{v}^2 + \frac{\tau^2}{2} \omega_0^2 \right) \times \\ \times \exp \left\{ -i\omega \left( 1 + \frac{\hbar\omega}{E} \right) \left[ (1 - \mathbf{n}\mathbf{v}) \tau + \frac{\tau^3}{24} \omega_0^2 \right] \right\}.$$

Эта формула показывает, что первая квантовая поправка входит в вероятность излучения посредством подстановки

$$\omega \rightarrow \omega \left( 1 + \frac{\hbar\omega}{E} \right)$$

в классической формуле для  $(\omega^{-1} d\mathcal{E}/dt d\omega d\sigma)$ . При этом с учетом (5.8) спектральная плотность излучения может быть записана в виде

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt d\omega} = \frac{3^{3/2}}{4\pi} \frac{e^2}{\mathcal{R}} \frac{\omega_0 \omega}{\omega_H^2} \gamma^4 \int_{\frac{\omega}{\omega_H} \left( 1 + \frac{\hbar\omega}{E} \right)}^{\infty} d\eta K_{5/3}(\eta), \quad (15.21)$$

где  $\omega_H = {}^{3/2} \omega_0 \gamma^3$ ,  $\mathcal{R} = E/eH$ .

Мы видим, что первая квантовая поправка к классической формуле (5.8) синхротронного излучения имеет вид

$$-\frac{3^{2/3}}{4\pi} \frac{e^2}{\mathcal{R}} \gamma^4 \frac{\omega_0}{\omega_H} \left( \frac{\omega}{\omega_H} \right)^4 \frac{\hbar\omega_H}{E} K_{5/3} \left( \frac{\omega}{\omega_H} \right). \quad (15.22)$$

При этом поправка к полной потере излученной энергии равна

$$\delta \dot{\mathcal{E}} = -3^{1/3} \cdot \frac{55}{36} \frac{e^2 \omega_0}{\mathcal{R}} \frac{\hbar \omega_H}{E} \gamma^4.$$

При выводе этого соотношения использована формула

$$\int_0^\infty d\eta \eta^3 K_{5/3}(\eta) = \frac{55}{27} \pi.$$

Таким образом, с учетом квантовой поправки имеем

$$\Delta \mathcal{E} = \Delta \mathcal{E}_{cl} \left( 1 - 3^{1/3} \frac{55}{16} \frac{\hbar}{m \mathcal{R}} \gamma^2 \right). \quad (15.23)$$

Эта формула совпадает с соответствующим результатом работы [38], полученным на основе непосредственного вычисления вероятности излучения (12.1) с использованием волновых функций электрона в магнитном поле.

Мы видим, что квантовая поправка к полной потере энергии частицей в магнитном поле определяется параметром  $\hbar \gamma^2 / m \mathcal{R}$ . Эта поправка растет с энергией частицы и с величиной напряженности магнитного поля и при достаточно больших энергиях и напряженностях полей может стать значительной. Подчеркнем, что этот вывод относится не только к полной потере энергии, но и к спектральному распределению излучения. Действительно, максимум спектрального распределения синхротронного излучения приходится на область частот  $\omega \sim \gamma^3 \omega_0$ . В этой области частот параметр  $\hbar \omega / E$ , определяющий отдачу при излучении, быстро растет с энергией и величиной магнитного поля. Поэтому при достаточно больших значениях этих величин учет отдачи при излучении может существенно повлиять как на величину, так и на форму спектрального распределения излучения.

Мы видим, что учет некоммутативности операторов, описывающих движение частицы во внешнем поле и поле излученного фотона, позволяет учесть эффекты, связанные с отдачей при излучении. Полученные выше на основе этого метода результаты справедливы, если отдача мала:

$$\hbar \omega \ll E. \quad (15.24)$$

## § 16. Излучение при высоких энергиях в квазиклассическом приближении

Полученные в предыдущем параграфе результаты основывались на гейзенберговском представлении операторов, определяющих матричный элемент процесса излучения. При этом было показано, что при высоких энергиях в квазиклассическом приближении квантовый эффект, связанный с отдачей при

излучении, может быть выделен на фоне квантовых эффектов, связанных с динамикой частицы во внешнем поле, и получена первая квантовая поправка к интенсивности излучения ультрарелятивистского электрона в постоянном магнитном поле. Эта поправка, как отмечалось, может быть большой, поэтому представляет большой интерес и определение следующих поправок, и получение общих формул, учитывающих отдачу при излучении. Как мы сейчас покажем, это можно сделать путем обобщения известного в квантовой механике метода ВКБ [40]. Такая задача может быть решена и путем обобщения метода Швингера (изложенного в предыдущем параграфе), что было сделано в работах [36]. Однако при этом остается неясным ряд вопросов, а именно, точность полученных результатов, а также вопрос об усреднении по начальным условиям.

В предлагаемом методе хотя и используются некоторые преобразования работы [37], но отсутствует переход к гейзенберговским операторам движения. Все вычисления проводятся в шредингеровском представлении с использованием обычных квазиклассических волновых функций. Для простоты вначале рассмотрим излучение бесспиновой заряженной частицы, движущейся в постоянном магнитном поле.

Воспользуемся с этой целью формулой (15.17), определяющей просуммированную по конечным состояниям вероятность излучения частицы во внешнем поле с векторным потенциалом  $\mathbf{A}$ . Эту формулу можно представить в виде

$$dw = \frac{e^2}{\hbar\omega} \frac{d^3k}{4\pi^2 E} \int dt dt' d^3r \varphi_i^*(\mathbf{r}, t') (\mathbf{e} \cdot \mathbf{P}^*, e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}) \times \\ \times \mathcal{H}^{-1} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\mathcal{H} + \hbar\omega) \tau \right] (\mathbf{e} \mathbf{P}, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}) \varphi_i(\mathbf{r}, t), \quad (16.1)$$

где  $\tau = t - t'$ ,  $\mathbf{P} = -i\hbar\nabla - e\mathbf{A}$  — оператор обобщенного импульса в шредингеровском представлении и  $\mathcal{H} = \sqrt{\mathbf{P}^2 + m^2}$ .

Учитывая соотношения (15.13) и (15.14), произведение множителей  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$  и  $\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})$  в (16.1) можно заменить единицей. При этом

$$dw = \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{d^3k}{\hbar\omega E} \int dt dt' d^3r \varphi_i^*(\mathbf{r}, t') (\mathbf{e} \cdot \mathbf{P}) \mathcal{H}_{\mathbf{P}-\mathbf{k}}^{-1} \times \\ \times \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\mathcal{H}_{\mathbf{P}-\mathbf{k}} + \hbar\omega) \tau \right] (\mathbf{e} \mathbf{P}) \varphi_i(\mathbf{r}, t), \quad (16.2)$$

где  $\mathcal{H}_{\mathbf{P}-\mathbf{k}} = \sqrt{(\mathbf{P}-\mathbf{k})^2 + m^2}$ .

Формула (16.2) для вероятности излучения является общей — она получена без использования каких-либо приближений относительно динамики частицы во внешнем поле. Для дальнейшего необходимо определить действие оператора

$\exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}\tau\right)$  на входящие в (16.2) функции. Вычисления проведем в квазиклассическом приближении, предполагая при этом, что  $\hbar\omega \sim E$ .

Заметим предварительно, что согласно (9.17) в квазиклассическом приближении волновая функция бесспиновой частицы имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) &\equiv \langle \mathbf{r} | \mathbf{e}^{-i\mathcal{H}t/\hbar} | \mathbf{p} \rangle = \\ &= C \left\| \frac{\partial^2 S(\mathbf{r}, \mathbf{p})^2}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{p}} \right\|^{1/2} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar}(S(\mathbf{r}, \mathbf{p}) - Et) \right\},\end{aligned}\quad (16.3)$$

где  $C$  — нормировочная постоянная,  $S(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  — классическое действие, определяемое классической траекторией частицы, проходящей через точку с координатой  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$  и имеющей импульс  $\mathbf{p}$  при  $t=0$ .

Действие оператора импульса  $\mathbf{p}$  на функцию  $\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)$  в расматриваемом приближении распространяется только на экспоненциальный фактор, так что

$$(\mathbf{e}\hat{\mathbf{p}})\varphi_i(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{e}\mathbf{p}(\mathbf{r})\varphi_i(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{p}(\mathbf{r}) = \nabla S(\mathbf{r}, \mathbf{p}) - e\mathbf{A}. \quad (16.4)$$

Определим теперь действие оператора  $\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}\tau\right)$  на входящие в (16.2) функции. С этой целью введем обозначение

$$F(\mathbf{r}, \tau, t) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(\mathcal{H}_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} + \hbar\omega)\tau\right] \mathbf{e}\mathbf{p}(\mathbf{r})\varphi_i(\mathbf{r}, t). \quad (16.5)$$

Тогда функция  $F(\mathbf{r}, \tau, t)$  будет удовлетворять уравнению

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial \tau} - \mathcal{H}_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} - \hbar\omega\right)F = 0. \quad (16.6)$$

Мы должны определить решение этого уравнения, удовлетворяющее условию

$$F(\mathbf{r}, \tau, t)|_{\tau=0} = \mathbf{e}\mathbf{p}(\mathbf{r})\varphi_i(\mathbf{r}, t). \quad (16.7)$$

Домножив (16.6) на оператор  $\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial \tau} - \hbar\omega + \mathcal{H}_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}\right)$ , приходим к следующему уравнению для  $F$ :

$$\left\{ \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial \tau} - \hbar\omega\right)^2 - (i\hbar\nabla + e\mathbf{A} + \hbar\mathbf{k})^2 - m^2 \right\} F = 0. \quad (16.8)$$

Решение (16.8) будем искать в виде

$$F = f_* e^{iS_*/\hbar}, \quad (16.9)$$

где  $S_*$  и  $f_*$  — функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} S_* + \hbar \omega\right)^2 - (\nabla S_* - \hbar \mathbf{k} - e\mathbf{A})^2 - m^2 = 0, \quad (16.10a)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} S_* + \hbar \omega\right) \frac{\partial}{\partial \tau} f_* - (\nabla S_* - \hbar \mathbf{k} - e\mathbf{A}) \nabla f_* - \\ - \frac{1}{2} (\nabla^2 S_*) f_* = \frac{i\hbar}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2\right) f_*. \end{aligned} \quad (16.10b)$$

Заметим, что при  $\mathbf{k}=0$  эти уравнения переходят в соответствующие уравнения (9.6) для функций  $S$  и  $f$ , определяющих волновую функцию частицы во внешнем поле в квазиклассическом приближении. Учитывая это, будем искать решение уравнения (16.10a) в виде

$$S_* = S(\mathbf{r}) - E(t + \tau) + \chi(\tau, t), \quad (16.11)$$

где  $S(\mathbf{r})$  — классическое действие, определяемое уравнением Гамильтона — Якоби

$$E^2 - (\nabla S - e\mathbf{A})^2 - m^2 = 0,$$

и  $\chi(\tau, t)$  — некоторая функция  $\tau$  и  $t$ .

Подставляя (16.11) в (16.10a), приходим к следующему уравнению для  $\chi$ :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \chi = -\hbar \frac{E}{E'} \left(\omega - \frac{\mathbf{k} \nabla S}{E}\right) - \frac{1}{2E'} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \tau}\right)^2, \quad (16.12)$$

где  $E' = E - \hbar \omega$ .

При высоких энергиях последним слагаемым в правой части уравнения (16.12) можно пренебречь. При этом с учетом гамильтоновых уравнений движения

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\nabla S - e\mathbf{A}}{E} \quad (16.13)$$

находим

$$\chi(\tau, t) = -\hbar \frac{E}{E'} [\omega \tau - \mathbf{k}(\mathbf{r}(\tau + t) - \mathbf{r}(t))]. \quad (16.14)$$

Рассмотрим теперь уравнение (16.10b) для  $f_*$ . Пренебрегая в нем слагаемым, пропорциональным  $\hbar$ , приходим к следующему уравнению для  $f_*$ :

$$E \frac{\partial}{\partial \tau} f_*^{(0)} + (\nabla S - e\mathbf{A}) \nabla f_*^{(0)} + \frac{1}{2} (\nabla^2 S) f_*^{(0)} = 0. \quad (16.15)$$

Решение этого уравнения с учетом граничного условия для преэкспоненты в (16.7) может быть записано в виде

$$f_*^{(0)}(\mathbf{r}, \tau, t) = c \left[ \int d^3 r_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(\tau + t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p})) \right]^{1/2} \mathbf{e}\mathbf{p}(\mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p})). \quad (16.16)$$

Таким образом, в квазиклассическом приближении с учетом членов порядка  $\hbar\omega/E \sim 1$

$$F(\mathbf{r}, \tau, t) = \mathbf{e}\mathbf{p}(\mathbf{r}(t)) c \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{p}} \right\|^{1/2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [S(\mathbf{r}, \mathbf{p}) - E(\tau + t) + \chi(\tau, t)] \right\}. \quad (16.17)$$

Подставляя это соотношение и выражение (16.3) для волновой функции в (16.2) и замечая, что

$$\mathcal{H}_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}^{-1} \varphi_i(\mathbf{r}, t) \approx (E')^{-1} \varphi_i(\mathbf{r}, t),$$

находим

$$dw = \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{d^3 k}{\hbar\omega E E'} \int dt dt' d^3 r c^2 \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{p}} \right\| \mathbf{e}\mathbf{p}(\mathbf{r}) \times \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{p}(\mathbf{r}(t)) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \chi(\tau, t) \right]. \quad (16.18)$$

Учитывая соотношение (9.16) для детерминанта  $\| \partial^2 S / \partial \mathbf{r} \partial \mathbf{p} \|$  и уравнения гамильтона (16.13), приходим к следующему выражению для вероятности излучения:

$$dw = \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{d^3 k}{\hbar\omega} \frac{E}{E'} c^2 \int dt dt' d^3 r_0 (\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{v}(t)) (\mathbf{e}\mathbf{v}(t')) \times \exp \left\{ -i \frac{E}{E'} [\omega(t' - t) - \mathbf{k}(\mathbf{r}(t') - \mathbf{r}(t))] \right\}. \quad (16.19)$$

Мы видим, что в квазиклассическом приближении вероятность излучения ультрарелятивистской частицы во внешнем поле с учетом отдачи при излучении определяется классической траекторией частицы в этом поле без учета влияния излучения на траекторию. При этом эффект отдачи при излучении проявляется в наличии общего множителя  $(E/E')$  в (16.19) и такого же множителя в показателе экспоненты. Интегрирование по  $\mathbf{r}_0$  означает усреднение по начальным условиям (напомним, что при выводе (16.19) предполагалось, что частица в начальном состоянии при  $t \rightarrow -\infty$  представляет собой плоскую волну).

Полученные выше формулы относятся к излучению быстрой частицей в магнитном поле. Этими формулами, однако, можно пользоваться и в случае излучения частицей в произвольном электромагнитном поле. Действительно,

гамильтониан, определяющий взаимодействие частицы с внешним электромагнитным полем, может быть записан в виде

$$\mathcal{H} = \sqrt{\mathbf{P}^2 + m^2} + eA_0, \quad (16.20)$$

где  $A_0(\mathbf{r})$  — потенциал электрического поля. Тогда функция

$$\varphi_p(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{r} | e^{-i\mathcal{H}t/\hbar} | \mathbf{p} \rangle \quad (16.21)$$

типа (16.3), построенная с помощью гамильтониана (16.20), будет удовлетворять уравнению

$$\left\{ \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 \right)^2 - \mathbf{P}^2 - m^2 + [\mathcal{H}, eA_0] \right\} \varphi_p(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Это уравнение отличается от уравнения Клейна—Гордона слагаемым  $[\mathcal{H}, eA_0]$ . При высоких энергиях в квазиклассическом приближении этим слагаемым можно, однако, пренебречь.

Действительно, коммутатор  $[\mathcal{H}, eA_0]$  равен

$$[\mathcal{H}, eA_0] = i\hbar e \frac{\partial}{\partial t} A_0.$$

Последняя же величина при высоких энергиях мала по сравнению с  $\mathcal{H}^2$ . Поэтому при высоких энергиях можно считать функцию (16.21) волновой функцией частицы в электромагнитном поле. С помощью этой функции, согласно формуле (16.1), так же как это было сделано выше в случае магнитного поля, можно вычислить вероятность излучения. Таким образом, при высоких энергиях в квазиклассическом приближении формулой (16.19) можно пользоваться для определения вероятности излучения бесспиновой частицы в произвольном электромагнитном поле. Формула (16.19) отличается от соответствующей формулы (9.27) работы [37], полученной на основе вычисления вероятности излучения (16.1) с использованием гейзенберговского представления операторов, тем, что в ней содержится усреднение по начальным координатам, которое отсутствует в формуле (9.27) работы [37].

Выясним теперь условия применимости формулы (16.19). С этой целью прежде всего напомним, что формула (16.19) справедлива, если энергии начальной и конечной частиц велики ( $E \gg m$ ,  $E' \gg m$ ). Это позволяет проводить вычисления входящих в матричный элемент величин по обратным степеням энергии. Но, кроме того, должны выполняться условия квазиклассичности движения частицы во внешнем поле. А именно, должны быть малыми слагаемые, отброшенные при решении уравнений (16.10).

Легко убедиться, что отброшенные при решении уравнения (16.10а) слагаемые имеют порядок малости  $\gamma^{-2}$ . Оценим далее

порядок малости членов, отброшенных при решении уравнения (16.106). Перепишем это уравнение с учетом (16.13) в виде

$$E \frac{d}{dt} f_* - \frac{1}{2} (\nabla^2 S) f_* = \chi' \frac{\partial}{\partial \tau} f_* + \hbar \left( \omega \frac{\partial}{\partial \tau} + \mathbf{k} \nabla \right) f_* + \frac{i\hbar}{2} \square f_*. \quad (16.22)$$

Подставляя в правую часть (16.22) выражение (16.16) для  $f_*^{(0)}$ , находим, что поправка к  $f_*^{(0)}$  имеет вид

$$f_*^{(1)} \approx E^{-1} \int_0^{\tau} dt \left[ \chi' \frac{\partial}{\partial t} + \hbar \left( \omega \frac{\partial}{\partial \tau} + \mathbf{k} \nabla \right) + \frac{i\hbar}{2} \square \right] f_*^{(0)}.$$

Учитывая, что при высоких энергиях характерные значения углов излучения малы,  $\theta \sim m/E$ , величину  $f_*^{(1)}$  можно оценить следующим образом:

$$f_*^{(1)} \sim \left[ \frac{\hbar \tau_{\text{eff}}}{E \rho_{\text{eff}}^2}, \frac{\hbar}{E} \frac{\partial}{\partial \tau}; \frac{\hbar \omega}{E} \gamma^{-2} \right] f_*^{(0)}, \quad (16.23)$$

где  $\tau_{\text{eff}}$  и  $\rho_{\text{eff}}$  — характерные значения интервала времени  $\tau = t - t'$  и прицельных расстояний (поперечных координат по отношению к вектору скорости частицы), вносящие основной вклад в излучение.

В случае излучения частицей в постоянном магнитном поле члены с  $\rho_{\text{eff}}$  в (16.23) отсутствуют. При этом по порядку величины  $\partial_{\tau} f_*^{(0)} \sim \omega_H f_*^{(0)}$ , где  $\omega_H$  — частота вращения частицы в магнитном поле, и, следовательно, порядок малости отброшенных слагаемых будет определяться параметром  $\hbar \omega_H / E$ , совпадающим с параметром (15.12), полученным Швингером.

Рассмотрим теперь возможность использования формулы (16.19) для описания излучения быстрой частицы в поле отдельного атома. Значения прицельных параметров, дающих вклад в излучение, в этом случае связаны со значениями переданных импульсов, приводящих к излучению, соотношением  $\rho \sim \hbar/q$ . Учитывая, что  $\tau_{\text{eff}} \sim 2\gamma^2/\omega$ , находим

$$f_*^{(1)} \sim \left[ \frac{q}{E}, \frac{E}{\hbar \omega} \frac{q^2}{m^2} \right] f_*^{(0)}. \quad (16.24)$$

Таким образом, формулой (16.19) можно пользоваться для описания излучения частицы в поле атома только при малых значениях переданных импульсов, когда выполняется неравенство

$$\frac{E}{\hbar \omega} \frac{q^2}{m^2} \ll 1. \quad (16.25)$$

Однако характерные значения переданных импульсов, вносящих вклад в излучение частицы в поле атома, как известно, лежат в интервале  $\hbar R^{-1} \lesssim q \lesssim m$ . В области  $q \sim m$  неравенство (16.25)



не выполняется и, следовательно, формулой (16.19), вообще говоря, нельзя пользоваться для описания излучения быстрой частицы в поле атома.

Иная ситуация имеет место в случае, когда частица в пределах длины когерентности сталкивается с большим числом атомов. Тогда связь между  $\rho$  и  $q$  определяется соотношением  $\mathbf{q} \approx \nabla \chi_0$ , где  $\chi_0 = -\frac{1}{v} \int dz U(\mathbf{r})$  — фаза рассеяния частицы (в случае цепочки  $N$  атомов, находящихся в пределах длины когерентности,  $\chi_0 \sim NZe^2/v$  — см. § 14), и неравенство  $\hbar\tau/E\rho^2 \ll 1$  приобретает вид

$$\frac{E}{\hbar\omega} \frac{q^2}{m^2} \frac{1}{\chi_0^2} \ll 1. \quad (16.26)$$

При достаточно больших значениях  $|\chi_0|$  это неравенство может быть выполнено и в области  $q \sim m$ . Поэтому формулой (16.19) можно пользоваться для описания излучения частицы в веществе, когда в пределах длины когерентности находится большое число атомов.

Заметим, что в веществе величина  $\chi_0$  пропорциональна числу атомов на длине когерентности  $\chi_0 \sim (l_c/l_e) Ze^2$ , где  $l_e$  — длина свободного пробега частицы между последовательными соударениями с атомами, поэтому неравенство (16.26) не нарушается с уменьшением  $\omega$ .

### § 17. Излучение фотона электроном в квазиклассическом приближении

Изложенный выше метод описания процесса излучения с учетом отдачи при излучении основывался на квазиклассическом приближении для волновой функции бесспиновой частицы во внешнем поле. Этот метод может быть обобщен и на случай излучения во внешнем электромагнитном поле частицы, обладающей спином, например, электрона или позитрона. Действительно, матричный элемент процесса излучения электрона в первом порядке теории возмущений по взаимодействию с полем излучения определяется формулой (12.2). Входящие в эту формулу волновые функции  $\Psi$  представляют собой решения уравнения Дирака (9.1). С помощью соотношения (9.2) можно перейти от волновой функции  $\Psi$  к функции  $\Phi$ , удовлетворяющей квадрированному уравнению Дирака (9.3). Если в последнем уравнении пренебречь взаимодействием типа спин-поле, т. е. отбросить слагаемое, пропорциональное  $\sigma_{\mu\nu} \cdot F_{\mu\nu}$  (точность такого приближения обсуждается в работе [37], где, в частности, показано, что при движении электрона в магнитном поле учет взаимодействия типа спин-поле в уравнении (9.3) дает добавку порядка  $e\hbar|H|$  в квадрат энергии и, следовательно, при высоких энергиях с точностью до членов

порядка  $e\hbar |\mathbf{H}| E^{-2}$  не сказывается на движении), то функция  $\Phi$  будет удовлетворять уравнению Клейна—Гордона (9.4). В этом приближении входящие в матричный элемент (12.2) волновые функции могут быть записаны в виде

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = c(\gamma_\mu \hat{P}_\mu + m) u \varphi(\mathbf{r}, t), \quad (17.1)$$

где  $u$ —постоянный биспинор и  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ —волновая функция бесспиновой частицы, удовлетворяющая уравнению Клейна—Гордона.

Подставляя волновую функцию (17.1) в матричный элемент (12.2) и поступая далее так же, как это было сделано при выводе формулы (16.19) для вероятности излучения бесспиновой частицы, получим вероятность излучения электрона во внешнем электромагнитном поле с учетом отдачи при излучении в квазиклассическом приближении. Мы здесь приведем только конечное выражение для вероятности излучения электрона в этом случае, просуммированное по поляризациям конечных частиц и усредненное по поляризациям начальных частиц:

$$dw = \frac{e^2}{\hbar\omega} \frac{d^3k}{4\pi^2} \frac{E^2 + E'^2}{2E E'} \int \frac{d^3r_0}{V} \left\{ [\mathbf{n}, \mathbf{I}]^2 + \frac{(\hbar\omega m)^2}{E^2(E^2 + E'^2)} |I|^2 \right\}, \quad (17.2)$$

где  $\mathbf{n}$ —единичный вектор в направлении излучения,  $V$ —нормировочный объем,

$$\{\mathbf{I}, I\} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \{ \mathbf{v}(t), 1 \} \exp \left[ i \frac{E\omega}{E'} (t - \mathbf{n}\mathbf{r}(t)) \right]$$

и  $\mathbf{r}(t)$ —классическая траектория электрона во внешнем поле без учета влияния излучения и спина частицы на траекторию.

Формула (17.2) обобщает соответствующее выражение классической теории излучения (3.2) на случай, когда существенна отдача при излучении. Условия применимости формулы (17.2) те же, что и условия применимости формулы (16.19), относящейся к бесспиновой частице.

Заметим, что формулы для спектральных плотностей излучения спинорной и бесспиновой частиц, вообще говоря, различны. Различие проявляется в слагаемых порядка  $(\hbar\omega/E)^2$  и выше. Первые же члены разложения вероятностей излучения спинорной и бесспиновой частиц по параметру  $\hbar\omega/E$  совпадают.

В формуле (17.2) может быть выполнено интегрирование по телесному углу излученного фотона:

$$\frac{dw}{d\omega} = \frac{e^2}{\pi} \frac{E^2 + E'^2}{2EE'} \int \frac{d^3r_0}{V} \operatorname{Re} \int dt d\tau e^{-iE\omega\tau/E'} \times \\ \times \left\{ \mathbf{v}(t+\tau) \mathbf{v}(t) - 1 + \frac{(\hbar\omega m)^2}{E^2(E^2 + E'^2)} \right\} \frac{\sin k \frac{E}{E'} |\mathbf{r}(t+\tau) - \mathbf{r}(t)|}{|\mathbf{r}(t+\tau) - \mathbf{r}(t)|}. \quad (17.3)$$

Характерные значения углов рассеяния быстрой частицы на длине формирования излучения малы, поэтому в (17.3) может быть выполнено разложение по этим углам. Воспользовавшись с этой целью преобразованиями § 3, находим, что

$$\frac{dw}{d\omega} = -\frac{e^2}{\pi} \frac{E^2 + E'^2}{2EE'} \frac{m^2}{E^2} \int \frac{d^3r_0}{V} \operatorname{Re} \int dt \int \frac{d\tau}{\tau} e^{-iE\omega\tau/E'} \times \\ \times \left( 1 + \frac{E^2}{2m^2} \vartheta^2(\tau) - \frac{\hbar^2\omega^2}{E^2 + E'^2} \right) \sin k \frac{E}{E'} \times \\ \times \left\{ v\tau - \frac{1}{2} \int_0^\tau dt' \vartheta^2(t') + \frac{1}{2\tau} \left( \int_0^\tau dt' \vartheta(t') \right)^2 \right\}, \quad (17.4)$$

где  $\vartheta(\tau)$  — угол рассеяния на интервале времени  $(t, t + \tau)$ .

При  $\hbar\omega \ll E$  это соотношение переходит в соответствующий результат классической теории излучения (3.6).

Приведенные выше формулы являются общими и не зависят от того, в каком поле происходит излучение электрона. Требуется только, чтобы энергия частицы была велика и чтобы движение электрона во внешнем поле можно было трактовать в терминах классической механики.

Если электрон движется по окружности в магнитном поле, то, согласно (17.4) и (5.8), вероятность излучения, отнесенная к единице длины, имеет вид

$$\frac{1}{T} \frac{dw}{d\omega} = -\frac{2e^2}{\pi} \frac{m^2}{E^2} \frac{E^2 + E'^2}{2EE'} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \times \\ \times \left( 1 + \frac{e^2 H^2}{2m^2} \tau - \frac{\hbar^2\omega^2}{E^2 + E'^2} \right) \cos \left( \frac{E}{E'} \omega \tau \right) \sin \frac{E}{E'} \omega \left( v\tau - \frac{e^2 H^2}{24E^2} \tau^3 \right). \quad (17.5)$$

Эта формула путем простых преобразований может быть записана через функцию Эйри [41—43]:

$$\frac{1}{T} \frac{dw}{d\omega} = -\frac{e^2 m^2}{\hbar\omega E \sqrt{\pi}} \frac{\zeta}{1+\zeta} \left\{ \int_x^\infty dx' \Phi(x') + \frac{2}{x} \left( 1 + \frac{\zeta^2}{2(1+\zeta)} \right) \Phi'(x) \right\}, \quad (17.6)$$

где  $\zeta = \hbar\omega/E'$ ,  $x = (\zeta/\chi)^{2/3}$  и  $\chi = (\hbar\omega_H/E) \gamma^3$ .

Формула (17.6) обобщает соответствующий результат классической теории синхротронного излучения (5.8) на случай, когда существенны эффекты, связанные с отдачей при излучении. В классическом пределе (17.6) переходит в формулу (5.8). Первая квантовая поправка, связанная с отдачей, совпадает с соответствующим результатом Швингера (15.21).

## РАДИАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ В АМОРФНОЙ СРЕДЕ

### § 18. Параметры, характеризующие радиационные процессы при высоких энергиях в аморфной среде

В предыдущих параграфах мы изучали радиационные процессы, происходящие при взаимодействии частиц высоких энергий с отдельными атомами. Теперь мы перейдем к изучению этих же процессов в материальных средах.

Среда оказывает влияние на радиационные процессы как в области малых, так и в области сколь угодно больших энергий частиц. Влияние среды в области малых энергий описывается двумя материальными константами — диэлектрической проницаемостью и магнитной проницаемостью (в общем случае эти величины представляют собой тензоры). Они описывают модификацию полей заряженных частиц в среде, обусловленную влиянием микрополей отдельных атомов. В области высоких частот эти тензоры мало отличаются от единицы. Однако влияние среды остается и при сколь угодно больших энергиях. Как мы уже отмечали, это связано с тем, что в области больших энергий радиационные процессы, такие как упругое рассеяние, излучение и образование электронно-позитронных пар, происходит на больших расстояниях вдоль импульсов частиц. В пределах этих расстояний (длин когерентности) частица может столкнуться с большим числом атомов, поэтому, по сути дела, должно учитываться взаимодействие частицы со всеми атомами, находящимися в пределах длины когерентности. Это относится как к аморфным, так и к кристаллическим средам. Мы начнем с излучения радиационных процессов в аморфной среде.

Основными параметрами, определяющими радиационные процессы в аморфной среде, являются длина когерентности  $l$ , длина свободного пробега быстрой частицы в веществе  $l_0$ , радиационная длина  $L_R$  ( $L_R$  определяется формулой (20.10)) и, конечно, толщина мишени  $L$ .

Длина когерентности быстро растет с ростом энергии частицы и при больших энергиях может иметь макроскопические размеры. При этом могут выполняться различные соотношения между длиной когерентности и длиной свободного пробега частицы в веществе между ее последовательными столкновениями с атомами, а также между длиной когерентности и толщиной мишени. В зависимости от этих

соотношений будут проявляться различные эффекты во взаимодействии.

В простейшем случае, когда длина когерентности мала по сравнению с длиной свободного пробега и, кроме того, толщина мишени достаточно мала, так что при прохождении частицы через среду вероятность интересующего нас процесса будет мала по сравнению с единицей, вероятность этого процесса может быть связана с сечением взаимодействия частицы с отдельным атомом среды  $d\sigma_0$  соотношением

$$dw = Ln d\sigma_0, \quad (18.1)$$

где  $n$  — плотность атомов. Взаимодействие частицы с различными атомами среды в этом случае происходит независимо.

С ростом толщины мишени вероятность  $W$  растет. Если эта вероятность станет сравнима с единицей, то формула (18.1) теряет свою силу. При этом необходим учет многократных процессов во взаимодействии. Так, если толщина мишени  $L$  превышает длину свободного пробега частицы в аморфной среде  $l_e = 1/n\sigma_e$ , где  $\sigma_e$  — полное сечение упругого рассеяния частицы атомом, то при изучении упругого рассеяния необходим учет многократного рассеяния. Если же толщина мишени будет сравнима с радиационной длиной  $L_R$ , то необходим учет потерь энергии частицей в веществе на излучение и процессы, связанные с каскадным размножением частиц. Эти процессы будут рассмотрены в гл. 9 и 10. В настоящей же главе будет рассмотрено взаимодействие быстрых частиц с аморфной средой в случае, когда толщина мишени мала по сравнению с радиационной длиной,

$$L \ll L_R. \quad (18.2)$$

Ниже будет показано, что даже при выполнении условия (18.2) среда может оказать значительное влияние на такие процессы, как излучение и образование электронно-позитронных пар, в результате чего вероятности этих процессов в веществе будут существенно отличаться от соответствующих вероятностей, определяемых формулой (18.1). Влияние среды на эти процессы имеет место в случае, когда частица в пределах длины когерентности сталкивается с большим числом атомов, и связано с различными интерференционными эффектами во взаимодействии.

Для того чтобы разъяснить, в чем здесь дело, приведем простые оценки спектральной плотности излучения ультрарелятивистского электрона в веществе в случае, когда  $l \gg l_e$ , т. е. когда электрон в пределах длины когерентности сталкивается с большим числом атомов. Воспользуемся с этой целью соотношениями (4.7) и (8.9), определяющими по порядку величины длину когерентности и спектральную плотность излучения быстрой частицы в веществе. Входящий в эти формулы квадрат угла рассеяния в рассматриваемом случае

представляет собой квадрат угла многократного рассеяния электрона в среде на длине когерентности. Эта величина линейно растет с расстоянием  $s$ , проходимым электроном в веществе:  $\overline{\vartheta}^2 = qs$  (см. формулу (20.11)), поэтому согласно (4.7) при малых и больших углах рассеяния

$$l \sim \begin{cases} 2\gamma^2/\omega, & \gamma^2 \overline{\vartheta}_i^2 \ll 1, \\ \sqrt{2q/\omega}, & \gamma^2 \overline{\vartheta}_i^2 \gg 1. \end{cases} \quad (18.3a)$$

$$l \sim \begin{cases} 2\gamma^2/\omega, & \gamma^2 \overline{\vartheta}_i^2 \ll 1, \\ \sqrt{2q/\omega}, & \gamma^2 \overline{\vartheta}_i^2 \gg 1. \end{cases} \quad (18.3b)$$

Используя эти соотношения для  $l$ , находим, что

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \approx \begin{cases} \frac{2e^2}{3\pi} \gamma^2 q L, & \gamma^2 \overline{\vartheta}_i^2 \ll 1, \\ \frac{e^2}{\pi} \sqrt{2\omega\gamma^2 q} L, & \gamma^2 \overline{\vartheta}_i^2 \gg 1. \end{cases} \quad (18.4a)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \approx \begin{cases} \frac{2e^2}{3\pi} \gamma^2 q L, & \gamma^2 \overline{\vartheta}_i^2 \ll 1, \\ \frac{e^2}{\pi} \sqrt{2\omega\gamma^2 q} L, & \gamma^2 \overline{\vartheta}_i^2 \gg 1. \end{cases} \quad (18.4b)$$

Первая из этих формул совпадает с логарифмической точностью с формулой Бете и Гайтлера, в которой не учитывается влияние многократного рассеяния на излучение:

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{вн}}}{d\omega} = Ln\omega \frac{d\sigma_{\text{вн}}}{d\omega}, \quad (18.5)$$

где  $d\sigma_{\text{вн}}/d\omega$  — сечение излучения быстрой частицы в поле отдельного атома (12.18) при  $\omega \ll E$ .

Вторая формула соответствует случаю, когда многократное рассеяние оказывает существенное влияние на излучение. Сравнивая эту формулу с (18.5), находим, что при  $\gamma^2 \overline{\vartheta}_i^2 \gg 1$

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \ll \frac{d\mathcal{E}_{\text{вн}}}{d\omega}. \quad (18.6)$$

Таким образом, мы видим, что из-за многократного рассеяния происходит уменьшение длины когерентности, что приводит, в свою очередь, к подавлению излучения. Эффект возникает в случае, когда среднее значение квадрата угла многократного рассеяния на длине когерентности  $\overline{\vartheta}_i^2$  превышает квадрат характерного угла излучения релятивистского электрона  $\theta^2 \sim \gamma^{-2}$ . На этот эффект обратили внимание Ландау и Померанчук [1].

Соотношения (18.4) показывают, что характер излучения быстрой частицы в аморфной среде изменяется при  $\gamma^2 \overline{\vartheta}_i^2 \sim 1$ , т. е. в области энергий электронов  $E$  и частот излученных фотонов  $\omega$ , удовлетворяющих условию

$$\frac{E^2}{m^2\omega} \sim \frac{1}{2} \frac{m^2}{E_s^2} L_R. \quad (18.7)$$

Так как  $m^2 E_s^{-2} \approx 1/1600$  (см. формулу (20.12)), то характерные значения длин когерентности, на которых происходит изменение характера излучения, малы по сравнению с радиационной

длиной  $l \ll L_R$  и, следовательно, эффект может проявляться при  $L \ll L_R$ .

Приведенные выше оценки справедливы в области малых частот излученных фотонов  $\omega \ll E$ . Формула (17.4), однако, показывает, что эти оценки по порядку величины справедливы и при  $\omega \sim E$ .

Если в (18.4) перейти с помощью соотношения

$$d\mathcal{E} = Ln\omega d\sigma$$

от интенсивности к сечению излучения и в последнем выражении сделать замены, соответствующие переходу к сечению процесса образования электронно-позитронных пар (см. § 12), то придем при  $E_+ \sim E_- \sim \omega/2$  к следующим оценкам для сечения этого процесса:

$$n\omega \frac{d\sigma_{\pm}}{dE_{\pm}} \sim \begin{cases} L_R^{-1} & \gamma^2 \overline{\mathcal{G}_{\pm}^2} \ll 1, \\ \frac{e^2}{\pi} \sqrt{\frac{2\omega}{L_R}} & \gamma^2 \overline{\mathcal{G}_{\pm}^2} \gg 1. \end{cases} \quad (18.8a)$$

$$(18.8b)$$

Формулы (18.8) показывают, что эффект, аналогичный эффекту подавления излучения быстрых частиц в аморфной среде, имеет место и в процессе образования пар фотонами высоких энергий в веществе. Действительно, при  $\gamma^2 \overline{\mathcal{G}_{\pm}^2} \ll 1$  согласно (18.8a)

$$\frac{d\sigma_{\pm}}{dE_{\pm}} \approx \frac{d\sigma_{\text{вн}}^{\pm}}{dE_{\pm}},$$

где  $d\sigma_{\text{вн}}^{\pm}/dE_{\pm}$  — сечение образования пары фотоном в поле изолированного атома (12.21). При  $\gamma^2 \overline{\mathcal{G}_{\pm}^2} \gg 1$  согласно (18.8b) имеем

$$\frac{d\sigma_{\pm}}{dE_{\pm}} \ll \frac{d\sigma_{\text{вн}}^{\pm}}{dE_{\pm}}.$$

Заметим, что условия, при которых происходит изменение характера образования пары в аморфной среде, выполняются при значительно больших энергиях частиц, чем условия, при которых происходит изменение характера излучения быстрой частицы в веществе. Связано это с тем, что длина когерентности процесса образования пары  $l_{\pm} = 2E_{\pm} E_{\mp} / m^2 \omega$  достигает максимальной величины  $l_{\pm} = \omega / 2m^2$  при  $E_{\pm} \sim E_{\mp} \sim \omega/2$ . В процессе же излучения длина когерентности  $l = 2E(E - \omega) / m^2 \omega$  содержит дополнительный множитель  $E/\omega$ , который в области малых частот значительно увеличивает длину когерентности.

Приведенные выше соотношения относились к случаю, когда длина когерентности  $l$  мала по сравнению с толщиной

мишени  $L$ . При достаточно высоких энергиях, однако, может быть выполнено и обратное неравенство. Взаимодействие частицы с мишенью в этом случае должно рассматриваться, как с единым объектом (см. § 26).

### § 19. Влияние поляризации среды на излучение

Длина когерентности  $l_c = 2\gamma^2/\omega$  растет с уменьшением частоты излученного фотона. Этот рост, однако, не является неограниченным. В области малых энергий фотонов становятся существенными поляризованные эффекты, благодаря которым происходит модификация окружающего электрон поля, что, в свою очередь, приводит к уменьшению длины когерентности и к подавлению интенсивности излучения.

Модификация поля частицы в среде описывается диэлектрической проницаемостью  $\epsilon(\omega)$ , которая в области высоких частот мало отличается от единицы [2],

$$\epsilon(\omega) \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \omega \gg \omega_p, \quad (19.1)$$

где  $\omega_p = \sqrt{4\pi n Z e^2 / m}$  — плазменная частота.

Подставляя эту величину в (4.6), приходим при малых углах рассеяния к следующему уравнению для длины когерентности:

$$\frac{\omega}{2\gamma^2} l(\omega, \theta) \left[ 1 + \frac{\gamma^2 \omega_p^2}{\omega^2} + \gamma^2 \overline{\vartheta}_1^2 + \gamma^2 \theta^2 \right] \sim 1. \quad (19.1)$$

При  $\gamma^2 \overline{\vartheta}_1^2 \ll 1$  имеем

$$l(\omega, \theta) = \frac{2\gamma^2/\omega}{1 + \gamma^2 \theta^2 + \gamma^2 \omega_p^2 \omega^{-2}}. \quad (19.3)$$

Таким образом, длина когерентности быстро растет с уменьшением  $\omega$ , достигая максимального значения при

$$\omega \sim \omega_p \frac{E}{m}. \quad (19.4)$$

При дальнейшем уменьшении частоты эта длина быстро уменьшается.

Покажем, как этот эффект отразится на излучении быстрой частицы в веществе. Для простоты рассмотрим вначале случай, когда угол рассеяния на длине когерентности достаточно мал, так что выполняется условие  $\omega/\overline{\vartheta}_1^2 \ll 1$ . Тогда в формуле (3.10) может быть выполнено разложение по углу рассеяния. В результате находим, что в первом приближении такого разложения при  $e\nu^2 < 1$

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{e^2 k}{2\pi} \int_{\delta}^{\infty} \frac{d\nu}{\nu^2} \left[ 1 - 2 \frac{\delta}{\nu} \left( 1 - \frac{\delta}{\nu} \right) \right] |\mathbf{W}(\nu)|^2, \quad (19.5)$$



где  $\delta = \omega(1 - v\sqrt{\epsilon})$  и  $\mathbf{W}(v)$  — фурье-компонента ускорения частицы (5.3). Переменная  $v$  связана с углом излучения  $\theta$  в формуле (3.9) соотношением  $v = \omega - kv$ . В области частот  $\omega \gtrsim \gamma\omega_p$ , входящая в (19.5) величина  $\delta$  равна

$$\delta = \frac{\omega}{2\gamma^2} \left( 1 + \frac{\gamma^2 \omega_p^2}{\omega^2} \right). \quad (19.6)$$

При больших энергиях излучение разыгрывается на длине вдоль импульса частицы, значительно превосходящей размер атома, поэтому величина  $|\mathbf{W}(v)|^2$  может быть записана в виде

$$|\mathbf{W}(v)|^2 = \sum_{n,r} (\mathfrak{S}_n \mathfrak{S}_r) \exp [iv(t_n - t_r)], \quad (19.7)$$

где  $\mathfrak{S}_n$  — угол рассеяния при столкновении с  $n$ -м атомом и  $t_n$  — момент времени, когда произошло столкновение. В аморфной среде столкновения частицы с различными атомами случайны, поэтому входящая в (19.5) величина  $|\mathbf{W}(v)|^2$  должна быть усреднена по положениям атомов в среде. При столкновении с атомом, находящимся в точке  $\mathbf{r}_n = (\rho_n, z_n)$ , угол рассеяния равен

$$\mathfrak{S}_n = \frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{-\infty}^{+\infty} dz u(\rho - \rho_n, z), \quad (19.8)$$

где  $\rho_n$  — прицельный параметр и  $u(\mathbf{r})$  — потенциальная энергия взаимодействия частицы с атомом. Подставляя это соотношение в (19.5), получим после усреднения по  $\rho_n$  и интегрирования по  $v$  следующее выражение для спектральной плотности излучения:

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \left( \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right)_0 \frac{1}{2\gamma^2(1 - v\sqrt{\epsilon})}. \quad (19.9)$$

Здесь первый множитель представляет собой обычное выражение для спектра излучения быстрой частицы в аморфной среде в области малых частот без учета многократного рассеяния и поляризации среды:

$$\left( \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right)_0 = \frac{2e^2}{3\pi} nL\gamma^2 \int d^2\rho \mathfrak{S}^2(\rho). \quad (19.10)$$

В случае, когда потенциал атома представляет собой экранированный потенциал Кулона (7.5), входящий в (19.10) интеграл расходится в области малых значений  $\rho$ . Из условия применимости формулы (19.5)  $\gamma\mathfrak{S} \lesssim 1$  вытекает, что интегрирование по  $\rho$  в (19.10) должно быть ограничено значением  $\rho_{\min} \sim 2Ze^2/m$ . Квантовые эффекты при излучении, однако, проявляются при  $\rho \sim m^{-1}$ , т. е. на расстояниях, больших, чем

$2Ze^2/m$ , поэтому  $\rho_{\min}$  должно быть положено равным  $m^{-1}$  [3]. При этом величина  $(d\mathcal{E}/d\omega)_0$  с логарифмической точностью совпадает со спектром излучения, даваемым формулой Бете и Гайтлера (18.5).

Второй множитель в (19.9) описывает влияние поляризации среды на излучение. В области частот  $\omega \sim \gamma\omega_p$  формула (19.9) приобретает вид

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \left( \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right)_0 \left( 1 + \frac{\gamma^2 \omega_p^2}{\omega^2} \right)^{-1}. \quad (19.11)$$

Эта формула показывает, что в области частот  $\omega \lesssim \gamma\omega_p$  поляризация среды приводит к значительному подавлению интенсивности излучения электрона в аморфной среде. Влияние поляризации среды на излучение ультрарелятивистского электрона в аморфной среде впервые было установлено Тер-Микаеляном [4].

## § 20. Многократное рассеяние быстрых заряженных частиц в аморфной среде

В § 18 было показано, что многократное рассеяние может оказать существенное влияние на излучение ультрарелятивистского электрона в аморфной среде, и приведены условия возникновения эффекта. Полученные результаты, однако, носили оценочный характер. Прежде чем переходить к количественной теории этого эффекта, изложим основные результаты теории многократного рассеяния быстрых заряженных частиц в веществе.

Рассмотрим вначале одномерную задачу (предполагается, что пучок падает на мишень вдоль оси  $z$ ). С этой целью введем функцию распределения  $f(\vartheta, z)$  для числа частиц с направлением движения  $\vartheta$  на глубине  $z$  их проникновения в среду и рассмотрим изменение этой функции с увеличением координаты  $z$ . Потерями энергии частицы в веществе будем пренебрегать.

Учитывая, что в аморфной среде столкновения частицы с различными атомами являются случайными и что при высоких энергиях характерные значения углов ее рассеяния при столкновении с каждым атомом малы,  $\vartheta \ll 1$ , находим, что кинетическое уравнение для функции  $f(\vartheta, z)$  имеет вид [5, 6]

$$\frac{d}{dz} f(\vartheta, z) = n \int d\sigma(\chi) [f(\vartheta + \chi, z) - f(\vartheta, z)], \quad (20.1)$$

где  $\vartheta$  — двумерный вектор, лежащий в плоскости, ортогональной оси  $z$ , и характеризующий угол рассеяния частицы относительно оси  $z$  (рис. 3.1),  $d\sigma(\chi)$  — сечение упругого рассеяния быстрой частицы отдельным атомом среды на угол

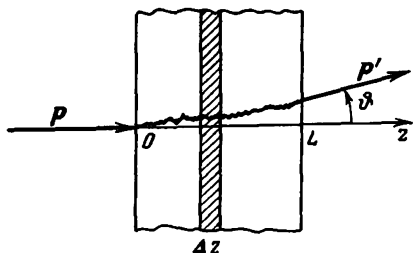


Рис. 3.1. Многократное рассеяние быстрой частицы в аморфной среде

$\chi$ . В случае экранированного потенциала Кулона сечение  $d\sigma(\chi)$  имеет вид

$$d\sigma(\chi) = \left( \frac{2Ze^2}{m} \right)^2 \times \frac{\chi d\chi d\varphi}{(\chi^2 + (ER)^{-2})^2}, \quad \chi \ll 1, \quad (20.2)$$

где  $\varphi$  — азимутальный угол вектора  $\chi$ .

Функция  $f(\vartheta, z)$  нормирована условием

$$\int d^2\vartheta f(\vartheta, z) = 1.$$

Кинетическое уравнение (20.1) определяет баланс частиц, причем первое слагаемое в правой части этого уравнения определяет число частиц, приходящих в направлении  $\vartheta$  из направления  $\vartheta + \chi$ , а второе слагаемое определяет число частиц, уходящих вследствие рассеяния из направления  $\vartheta$ .

Решение уравнения (20.1), удовлетворяющее граничному условию

$$f(\vartheta, 0) = \delta(\vartheta),$$

было получено в работах [5, 6]. Это решение удобно представить в виде

$$f(\vartheta, L) = \int d^2\rho \exp\{i\rho\mathbf{p}\vartheta + nL \int d\sigma(\chi) [1 - J_0(\rho r\chi)]\}, \quad (20.3)$$

где  $\rho = (x, y)$  — двумерный вектор координат  $x$  и  $y$  в плоскости, ортогональной оси  $z$ , и  $\mathbf{p}$  — импульс частицы.

Если толщина мишени достаточно мала, так что выполняется условие

$$nL\sigma_e \ll 1, \quad (20.4)$$

где  $\sigma_e$  — полное сечение упругого рассеяния частицы отдельным атомом (в случае экранированного потенциала Кулона  $\sigma_e = 4\pi Z^2 e^4 R^2$ ), то в (20.3) может быть выполнено разложение по  $L$ . В первом приближении такого разложения при  $\vartheta \neq 0$

$$f(\vartheta, L) = nL \frac{d^2\sigma(\vartheta)}{d\vartheta^2}. \quad (20.5)$$

Эта формула совпадает с формулой (18.1) для вероятности процесса упругого рассеяния, справедливой в случае, когда можно пренебречь многократным рассеянием частицы в веществе. Неравенство (20.4) фактически представляет собой условие на толщину мишени  $L \ll l_e$ , где  $l_e = 1/n\sigma_e$ , при котором многократное рассеяние отсутствует.

С ростом толщины мишени условие (20.4) нарушается. При этом формула (20.5) теряет свою силу и распределение частиц по углам должно определяться по формуле (20.3).

Рассмотрим еще один важный предельный случай, при котором формула (20.3) существенно упрощается. С этой целью заметим, что характерные значения  $\rho$ , дающие главный вклад в интеграл по  $\rho$  в (20.3), по порядку величины равны  $\rho \sim 1/p\vartheta$ . Если при таких значениях  $\rho$  аргумент функции Бесселя  $J_0(p\rho\chi)$  будет мал в области углов  $\chi$ , дающих главный вклад в интеграл по  $\chi$  в (20.3), то функцию Бесселя можно разложить:

$$J_0(p\rho\chi) \approx 1 - \frac{1}{2}(p\rho\chi)^2 + \dots$$

Сохраняя два первых члена разложения, получим после интегрирования по  $\rho$  в (20.3) следующее выражение для функции распределения:

$$f(\vartheta, L) = \frac{4\pi}{\vartheta^2} \exp\left(-\frac{\vartheta^2}{\vartheta^2}\right), \quad (20.6)$$

где

$$\overline{\vartheta^2} = Ln \int d\sigma(\chi) \cdot \chi^2. \quad (20.7)$$

Легко проверить, что

$$\overline{\vartheta^2} = \int d^2\vartheta \vartheta^2 f(\vartheta, L). \quad (20.8)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае распределение частиц по углам является гауссовым со средним квадратом угла рассеяния, определяемым соотношением (20.7).

Характерные значения  $\vartheta^2$  в (20.8) порядка  $\overline{\vartheta^2}$ . Подставляя это значение  $\vartheta^2$  в неравенство  $\chi^2 \ll \vartheta^2$ , определяющее условие применимости формулы (20.6), находим, что эта формула справедлива, если

$$nL\sigma_e \gg 1, \quad (20.9)$$

т. е. если частица в веществе сталкивается со многими атомами.

Заметим, что интеграл по  $\chi$  в (20.7), вообще говоря, логарифмически расходится в области больших углов рассеяния. Поэтому при вычислении  $\overline{\vartheta^2}$  необходимо проводить обрезание этого интеграла. Значение  $\chi_{\max}$  может быть определено из условия применимости формулы (20.6):

$\chi_{\max} \sim \sqrt{\overline{\vartheta^2}}$ . При больших энергиях необходимо учитывать также размеры ядра атома. Величина  $\chi_{\max}$  при этом будет определяться дифракционным углом  $\chi_{\max} \sim 1/pR_n$ , где  $R_n$  — размер ядра атома. В случае экранированного потенциала Кулона тогда имеем

$$\overline{\vartheta^2} = 2\pi\eta nZ^2 e^4 L,$$

где  $\eta = \ln(pR\chi_{\max})$  и  $\chi_{\max} = \min(\sqrt{\overline{\vartheta^2}}, (pR_n)^{-1})$ ,

Перепишем это соотношение в форме, принятой в каскадной теории. Для этого будем измерять толщину мишени  $L$  в радиационных длинах  $L_R$ :

$$L_R^{-1} = \frac{4Z^2 e^6 n}{m^2} \ln(183Z^{-1/3}). \quad (20.10)$$

Значения  $L_R$  для некоторых веществ приведены ниже:

C	Si	Ge	W	Pb	воздух	вода
14,7	10,2	2,35	0,33	0,26	30 000	33,9

Цифры здесь соответствуют значениям  $L_R$  в сантиметрах.

Тогда

$$\overline{\mathfrak{g}^2} = E_s^2 L / E^2 L_R, \quad (20.11)$$

где  $E_s^2 = 4\pi \cdot 137 \cdot m^2 [\ln(ER\chi_{\max}) / 2 \ln(183Z^{-1/3})]$ .

При  $\chi_{\max} \sim 1/pR_n$  выражение в квадратных скобках близко к единице, так что

$$E_s^2 \approx 4\pi \cdot 137 m^2. \quad (20.12)$$

Формула (20.6) может быть получена также путем непосредственного решения некоторого дифференциального уравнения, вытекающего из уравнения (20.1). А именно, если характерные значения углов рассеяния частицы в веществе  $\mathfrak{g}_{\text{eff}}$  будут велики по сравнению с характерными значениями углов рассеяния  $\chi_{\text{eff}}$  при столкновении с отдельным атомом, то в уравнении (20.1) может быть выполнено разложение функции  $f(\mathfrak{g} + \chi, z)$  по  $\chi$ . Сохраняя первый не исчезающий член разложения в (20.1), приходим к следующему дифференциальному уравнению для функции  $f$ :

$$\frac{d}{dz} f(\mathfrak{g}, z) = \frac{1}{4} q \frac{\partial^2}{\partial \mathfrak{g}^2} f(\mathfrak{g}, z), \quad q = \frac{1}{L} \overline{\mathfrak{g}^2}. \quad (20.13)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию  $f(\mathfrak{g}, 0) = \delta(\mathfrak{g})$ , имеет вид (20.6).

Полученные выше результаты относились к одномерной задаче, когда функция распределения зависела только от углов рассеяния и глубины проникновения частицы в среду  $z$ . Рассмотрим теперь распределение частиц в веществе по всем координатам и по углам. С этой целью введем функцию распределения  $f(\mathfrak{g}, \mathbf{r}; t)$  для числа частиц со скоростью  $\mathbf{v}$  в точке  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$  и исследуем поведение этой функции с глубиной проникновения частиц в среду.

Функция  $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}; t)$  удовлетворяет следующему кинетическому уравнению [7]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left( \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) f = n \int d\sigma(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) [f(\mathbf{v}', \mathbf{r}; t) - f(\mathbf{v}, \mathbf{r}; t)], \quad (20.14)$$

где  $d\sigma(\mathbf{v}'-\mathbf{v})$ —сечение упругого рассеяния частицы атомом, при котором ее скорость изменяется от  $v$  к  $v'$  (при этом рассеяние происходит на угол  $\vartheta = 2 \arcsin(|\mathbf{v}'-\mathbf{v}|/2v)$ ).

В стационарном случае, когда значение  $f$  от времени не зависит, для малых углов рассеяния уравнение (20.14) может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial z} f(\vartheta, \mathbf{r}) + \left( \vartheta \frac{\partial}{\partial \rho} \right) f(\vartheta, \mathbf{r}) = \int_v^n d\sigma(\chi) [f(\vartheta + \chi, \mathbf{r}) - f(\vartheta, \mathbf{r})], \quad (20.15)$$

где  $\rho$ —радиус-вектор в плоскости, ортогональной скорости падающей частицы,  $\vartheta$ —угол ее рассеяния.

При выполнении условия  $nL\sigma_e \gg 1$ , как отмечалось выше, происходит многократное рассеяние частицы в веществе, при котором характерные значения углов рассеяния  $\vartheta$  велики по сравнению с характерными значениями углов  $\chi$  рассеяния частицы на отдельных атомах. Интегро-дифференциальное уравнение (20.15) в этом случае может быть сведено к следующему дифференциальному уравнению для определения функции  $f(\vartheta, \rho, z)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \left( \vartheta \frac{\partial}{\partial \rho} \right) f = \frac{1}{4v} q \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} f. \quad (20.16)$$

Решение последнего уравнения, удовлетворяющее граничному условию

$$f(\vartheta, \rho, 0) = \delta(\vartheta) \delta(\rho) \quad (20.17)$$

и условию нормировки

$$\int d^2 \rho d^2 \vartheta f(\vartheta, \rho, z) = 1,$$

имеет вид

$$f = \frac{12}{\pi^2 L^2 (\vartheta^2)^2} \exp \left\{ -\frac{4}{\vartheta^2} \left( \vartheta^2 + \frac{3\rho^2}{L^2} - 3\frac{\rho\vartheta}{L} \right) \right\}. \quad (20.18)$$

Эта формула получена Ферми (вывод приведен в [8]). Проинтегрировав выражение (20.18) по  $\rho$  придем к распределению частиц по углам на глубине  $L$ , определяемому соотношением (20.6).

Формула (20.18) позволяет определить среднее значение смещения частицы в плоскости  $(x, y)$ , ортогональной оси  $z$  в зависимости от глубины проникновения частицы в среду. Домножив с этой целью  $f(\vartheta, \rho, z)$  на  $\rho^2$ , получим после интегрирования по  $\rho$  и  $\vartheta$ :

$$\overline{\rho^2} = \frac{1}{3} \frac{E_s^2 L^3}{E^2 L_R}. \quad (20.19)$$

## § 21. Эффект Ландау — Померанчука

Перейдем теперь к количественной теории влияния многократного рассеяния на излучение ультрарелятивистской частицы в аморфной среде. В § 19 было показано, что если квадрат угла рассеяния электрона в пределах длины когерентности мал по сравнению с квадратом характерного угла его излучения  $\theta^2 \sim \gamma^{-2}$ , то при  $\varepsilon=1$  спектр излучения электрона в аморфной среде с логарифмической точностью совпадает с соответствующим результатом Бете и Гайтлера (18.5), в котором влияние многократного рассеяния на излучение не учитывается. Иными словами, в этом случае многократное рассеяние не сказывается на излучении электрона в веществе.

С ростом энергии частицы растет длина когерентности  $l_c = 2\gamma^2/\omega$ . Растет при этом и среднее значение квадрата угла ее рассеяния на длине  $l_c$ , так что при достаточно больших  $E$  условие применимости формулы (19.9) нарушается. Процесс излучения электрона в веществе в этом случае требует специального исследования.

Заметим, что существует большой интервал энергий, в котором условие  $\gamma^2 \vartheta_i^2 \ll 1$  нарушается в области малых энергий фотонов  $\omega \ll E$ , поэтому вопрос о влиянии многократного рассеяния на излучение может быть рассмотрен в рамках классической электродинамики.

Если условие  $\gamma^2 \vartheta_i^2 \ll 1$  не выполняется, то для определения спектра излучения необходимо пользоваться общей формулой (3.6). Эта формула должна быть усреднена по случайным значениям углов рассеяния частицы в веществе (случайность связана с хаотическим расположением атомов в аморфном теле). Точное проведение усреднения затрудняется тем, что угол рассеяния входит в спектральную плотность излучения (3.6) под знаком синуса. Ландау и Померанчук, имея в виду получение оценок при  $\gamma^2 \vartheta_i^2 \gg 1$  предложили [1] заменить среднее значение синуса синусом от среднего значения величины. Учитывая при этом, что

$$\begin{aligned} \langle \int_0^t d\tau \vartheta_\tau^2 \rangle &= \langle \vartheta_i \int_0^t d\tau \vartheta_\tau \rangle = \frac{1}{2} q t |t|, \\ \langle (\int_0^t d\tau \vartheta_\tau)^2 \rangle &= \frac{1}{3} q |t|^3 \end{aligned}$$

(где  $\vartheta_i$  — угол рассеяния на интервале времени  $(0, t)$  и  $q$  — среднее значение квадрата угла рассеяния частицы на единице длины), приходим к следующей формуле для усредненного значения спектральной плотности излучения:

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \frac{e^2 \omega L}{\pi \gamma^2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \left( 1 + \frac{1}{2} \gamma^2 q \tau \right) \sin \left[ (1-v) \omega \tau + \frac{1}{12} \omega q \tau^2 \right]. \quad (21.1)$$

Влияние поляризации среды на излучение здесь не учитывается, т. е. полагается  $\varepsilon(\omega)=1$ .

Формула (21.1) отличается множителем перед знаком синуса от соответствующей формулы работы [1] (см. обзор [9]).

В интересующем Ландау и Померанчука случае  $\gamma^2 \vartheta_i^2 \gg 1$  можно пренебречь под знаком синуса слагаемым, пропорциональным  $\tau$ . При этом формула (21.1) приобретает вид

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \mathcal{E}'_{LP} = L \frac{e^2}{2} \sqrt{\frac{3\omega q}{2\pi}}. \quad (21.2)$$

Сравнение этой формулы с результатом Бете и Гайтлера (18.5) показывает, что при выполнении условия  $\gamma^2 \vartheta_i^2 \gg 1$

$$\mathcal{E}'_{LP} \ll \mathcal{E}'_{BH}.$$

Таким образом, при  $\gamma^2 \vartheta_i^2 \gg 1$  многократное рассеяние существенно изменяет спектр излучения электрона в веществе по сравнению со случаем  $\gamma^2 \vartheta_i^2 \ll 1$ .

Формула (21.2) только числовым множителем отличается от соответствующего предельного случая точной формулы (22.9), полученной Мигдалом [10]. Несмотря на то, что соотношения (21.1) и (21.2) носят оценочный характер, предложенный Ландау и Померанчуком вывод вскрывает существо эффекта — эффект обусловлен искривлением траектории частицы в аморфной среде в пределах длины когерентности, связанным с многократным рассеянием.

Действительно, согласно (20.19) среднее смещение траектории частицы в поперечной плоскости, связанное с многократным рассеянием, растет со временем по закону

$$\sqrt{\rho^2} \sim t^{3/2}. \quad (21.3)$$

Этому смещению соответствует некоторое среднее ускорение частицы в среде

$$\frac{d^2}{dt^2} \sqrt{\rho^2} \sim t^{-1/2}. \quad (21.4)$$

Если же частица движется ускоренно, то она излучает. Спектр излучения, соответствующий данному ускоренному движению, и определяется формулой Ландау и Померанчука (21.2).

Отметим в этой связи, что многократному рассеянию соответствует, строго говоря, некоторая ломаная траектория. Для оценки же спектральной плотности излучения при  $\gamma^2 \vartheta_i^2 \gg 1$ , как мы видели, эта ломаная кривая может быть заменена плавной траекторией. Переход от ломаной кривой к плавной фактически и производится в рассмотренном Ландау и Померанчуком случае. Эту плавную траекторию обычно принято называть фракталью (см., например, [11]).



Изложенный выше метод оценки спектра излучения быстрой частицы в веществе позволяет также установить определенную аналогию между эффектом Ландау и Померанчука и синхротронным излучением. Действительно, как мы видели, эффект Ландау и Померанчука связан с кривизной траектории частицы, обусловленной многократным рассеянием. Синхротронное же излучение связано с кривизной траектории частицы, обусловленной внешним магнитным полем. В обоих случаях спектральная плотность излучения может быть представлена в виде интеграла по времени  $\tau$  (см. формулы (5.8) и (21.1)) и мы можем непосредственно сравнить формулы, описывающие эти эффекты.

В случае эффекта Ландау и Померанчука под знаком синуса в (21.1) входят слагаемые, пропорциональные  $\tau$  и  $\tau^2$  в случае же синхротронного излучения входят слагаемые, пропорциональные  $\tau$  и  $\tau^3$ . В обоих случаях в области достаточно малых частот линейные слагаемые по  $\tau$  в осциллирующих множителях могут быть опущены. При этом в аморфной среде спектр излучения определяется соотношением (21.2), а в магнитном поле — соответствующей асимптотикой соотношения (5.8). Таким образом, в обоих случаях с уменьшением  $\omega$  интенсивность излучения уменьшается. Законы этого уменьшения, однако, различны, поскольку под знаком синуса в формуле синхротронного излучения входит слагаемое с  $\tau^3$ , а в формуле Ландау и Померанчука — слагаемое с  $\tau^2$ . В свою очередь, это различие в степенях  $\tau$  связано с различием кривизн траекторий, обусловленных магнитным полем и многократным рассеянием.

## § 22. Учет влияния многократного рассеяния на излучение методом кинетического уравнения

В методе Ландау и Померанчука для получения среднего значения спектральной плотности излучения ультрарелятивистского электрона в аморфной среде среднее значение от синуса заменялось синусом среднего значения. Такая замена, однако, пригодна только для получения оценочных результатов. Существует два метода, позволяющих развить строгую количественную теорию эффекта Ландау и Померанчука — метод кинетического уравнения и метод функционального интегрирования. Начнем с изложения первого метода, принадлежащего Мигдалу [10, 12].

Будем исходить из формулы (3.2) для спектрально-угловой плотности излучения и представим ее в виде

$$\frac{d\mathcal{E}}{\omega d\sigma} = \frac{e^2}{2\pi^2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^{\infty} d\tau [\mathbf{k}, \mathbf{v}] [\mathbf{k}, \mathbf{v}'] e^{-i\omega\tau + ik(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}, \quad (22.1)$$

где  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ,  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}(t')$  и  $\omega = |\mathbf{k}|$ .

Задача состоит в усреднении этого выражения по всем возможным траекториям частицы в веществе, т. е. в определении величины

$$K = \langle [\mathbf{k}, \mathbf{v}'] [\mathbf{k}, \mathbf{v}] \exp(ik(\mathbf{r}' - \mathbf{r})) \rangle, \quad (22.2)$$

где угловые скобки служат для обозначения усреднения.

Введем две вероятностные функции:  $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t)$  — вероятность значения координаты  $\mathbf{r}$  и скорости  $\mathbf{v}$  в момент времени  $t$  и  $f_2(\mathbf{r}', \mathbf{v}'; \mathbf{r}, \mathbf{v}; \tau)$  — вероятность значений  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{v}'$  в более поздний момент времени  $t + \tau$  при условии, что эти величины в момент времени  $t$  имеют значения  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$ . Тогда величина  $K$  может быть представлена в виде

$$K = \int d^3 r' d^3 v' d^3 r d^3 v e^{ik(\mathbf{r}' - \mathbf{r})} [\mathbf{k}, \mathbf{v}'] \cdot [\mathbf{k}, \mathbf{v}] f_1 \cdot f_2. \quad (22.3)$$

Вероятностные функции  $f_1$  и  $f_2$  определяются кинетическим уравнением (20.14) и удовлетворяют следующим начальным условиям:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}; 0) &= \delta(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0), \\ f_2(\mathbf{r}', \mathbf{v}'; \mathbf{r}, \mathbf{v}; 0) &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}'), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{v}_0$  — начальная скорость.

Из кинетического уравнения и начальных условий следует, что  $f_2$  зависит только от разности координат  $(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ . В формулу (22.3) входит фурье-образ величины  $f_2$ :

$$f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}', \mathbf{v}; \tau) = \int d(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) e^{ik(\mathbf{r}' - \mathbf{r})} f_2(\mathbf{r}', \mathbf{v}'; \mathbf{r}, \mathbf{v}; \tau),$$

поэтому (22.3) можно переписать в виде

$$K = \int d^3 r d^3 v d^3 v' [\mathbf{k}, \mathbf{v}] \cdot [\mathbf{k}, \mathbf{v}'] f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}', \mathbf{v}; \tau). \quad (22.4)$$

Используя фурье-преобразование функции распределения  $f_2$ , приходим к следующему уравнению для  $f_{\mathbf{k}}$ :

$$\frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial \tau} - i\mathbf{k} \mathbf{v}' f_{\mathbf{k}} = n \int d\sigma(\mathbf{v}'' - \mathbf{v}') [f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}'', \mathbf{v}; \tau) - f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}', \mathbf{v}; \tau)], \quad (22.5)$$

причем  $f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}', \mathbf{v}; 0) = \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}')$ . Решение этого уравнения теперь составляет нашу главную задачу.

Характерные значения углов рассеяния и излучения релятивистской частицы в веществе малы, поэтому в (22.5) может быть выполнено разложение по этим углам. Удобно отсчитывать углы относительно направления движения фотона  $\mathbf{n}$ . В приближении малых углов справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{v} \approx v \left( 1 - \frac{1}{2} \vartheta^2 \right) \mathbf{n} + \vartheta, \quad \vartheta \ll 1,$$

$$\mathbf{v}' \approx v' \left( 1 - \frac{1}{2} \vartheta'^2 \right) \mathbf{n} + \vartheta', \quad \vartheta' \ll 1.$$

Подставляя эти соотношения в уравнение (22.5) и сохраняя два первых члена разложения входящих в (22.5) величин по углам, приходим к уравнению Фоккера—Планка

$$\frac{\partial f_k}{\partial \tau} - ikv \left(1 - \frac{1}{2} \vartheta'^2\right) f_k = \frac{1}{4} q \frac{\partial^2}{\partial \vartheta'^2} f_k \quad (22.6)$$

с начальным условием  $f_k(\vartheta', \vartheta; 0) = \delta(\vartheta - \vartheta')$ , где  $q$  определяется соотношением (20.13).

Решение уравнения (22.6) следует искать в виде

$$f_k(\vartheta', \vartheta; \tau) = \exp(\alpha \vartheta'^2 + \beta \vartheta \vartheta' + \eta),$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\eta$  — некоторые функции, зависящие от  $\tau$  и  $\vartheta$ . Мы не будем здесь приводить подробностей решения уравнения (22.6). Этот вопрос хорошо изложен в работах [3, 13].

Решение должно быть, очевидно, подставлено в формулу (22.4). В результате, после интегрирования по углам излучения получим формулу Мигдала [10] для спектра излучения быстрой частицы в аморфной среде

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \left( \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right)_0 \Phi_M(s), \quad (22.7)$$

где  $(d\mathcal{E}/d\omega)_0 = e^2 q L / 3\pi(1-v)$  — спектр излучения без учета многократного рассеяния,  $s = \frac{1}{2}(1-v)\sqrt{\omega/q}$  и  $\Phi_M(s)$  — функция, учитывающая влияние многократного рассеяния на излучение:

$$\Phi_M(s) = 24s^2 \left( \int_0^\infty dx \operatorname{cth} x e^{-2sx} \sin 2sx - \frac{\pi}{4} \right). \quad (22.8)$$

Рассмотрим два предельных случая формулы (22.8).

Если  $s > 1$ , то  $\Phi_M \approx 1$ . Этот случай соответствует малым энергиям частиц и большим частотам излученных фотонов. При этом многократное рассеяние не оказывает влияния на излучение.

При малых значениях  $s$  функция  $\Phi_M \approx 6s$  и выражение для  $\langle d\mathcal{E}/d\omega \rangle$  приобретает вид

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = L \frac{e^2}{\pi} \sqrt{\omega q}. \quad (22.9)$$

Эта формула только числовым множителем отличается от оценочного результата Ландау и Померанчука (21.2).

При произвольных значениях  $s$  график функции  $\Phi_M(s)$  представлен на рис. 3.2.

Мы видим, что изложенный метод кинетического уравнения позволяет не только уточнить коэффициент в формуле Ландау и Померанчука, но и описать промежуточную область перехода от результата Бете и Гайтлера к результату Ландау и Померанчука.

На основе метода кинетического уравнения было изучено влияние и многих других факторов на излучение, таких, например, как отдача при изучении [14], поляризация среды [4], роль границ мишени [15], поглощение фотонов; были оценены также пределы применимости метода Фоккера—Планка для данной задачи и указана процедура повышения точности этого метода [16], исследовано угловое распределение излучения и его поляризация [17] и др. (см. обзоры [3, 18, 19], посвященные данной теме, и ссылки в них).

При этом, однако, среда всегда предполагалась аморфной.

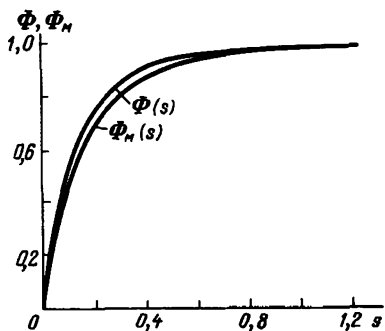


Рис. 3.2. Графики функций  $\Phi_M(s)$  и  $\Phi(s)$  (см. § 53), определяющих влияние многократного рассеяния на излучение быстрой частицы в аморфной среде и в кристалле

### § 23. Усреднение по траекториям спектра излучения методом функционального интегрирования

Общая формула для спектральной плотности излучения (3.10) определяется углами рассеяния частицы в веществе. Эти величины в силу многократного рассеяния являются случайными, поэтому по ним должно проводиться усреднение. В методе Мигдала, для того чтобы произвести усреднение, использовалось кинетическое уравнение для распределения частиц по координатам и скоростям.

Исходным, однако, в этой задаче можно считать понятие траектории частицы, которая является случайной. Поэтому усреднение должно, по сути дела, производиться по случайным траекториям. Такое усреднение может быть произведено с помощью метода функционального интегрирования. Этот метод получил в настоящее время широкое развитие в связи с различными задачами теории поля, не говоря уже о том, что с помощью этого метода, как показал Фейнман [20], удается наглядно разъяснить связь между квантовой и классической механикой. Возможность использования метода функционального интегрирования для усреднения по случайным траекториям в задачах, связанных с излучением, была установлена в работах [21, 22]. Важность такого подхода заключается в том, что он позволяет единым образом учитывать влияние случайных факторов на излучение в различных задачах, таких как учет влияния многократного рассеяния на излучение в аморфных средах, в кристаллах, а также при излучении во внешних полях.

Процедура функционального интегрирования может быть сравнительно просто выполнена в том случае, если усредняемый

функционал имеет гауссову форму, а случайный процесс является гауссовым. Такая ситуация имеет как раз место в рассматриваемой нами задаче.

Действительно, согласно (3.10) спектральная плотность излучения представляет собой функционал  $d\mathcal{E}[\vartheta(\tau)]/d\omega$  случайных значений угла рассеяния  $\vartheta(\tau)$ , в который угол  $\vartheta$  входит квадратично под знаком синуса, т. е. этот функционал имеет гауссову форму. Что касается случайного процесса, связанного с многократным рассеянием, то в случае аморфного вещества этот процесс является гауссовым [20]. Это значит, что если в начальный момент времени распределение частиц по углам было вида дельта-функции  $f(\vartheta, 0) = \delta(\vartheta)$ , то к моменту времени  $\tau$  это распределение будет иметь вид

$$f(q, \tau) = \frac{1}{\pi q \tau} \exp\left(-\frac{\vartheta^2}{q \tau}\right), \quad (23.1)$$

где  $q$  — среднее значение квадрата угла рассеяния частицы в аморфной среде на единице длины (20.13).

Используя эту формулу, можно получить плотность вероятности того, что углы рассеяния  $\vartheta_n = \vartheta(n\Delta)$  в моменты времени  $t_n = n\Delta$  будут лежать в интервалах  $(\vartheta_n, \vartheta_n + d\vartheta_n)$  [23]

$$d\mathcal{P}_N = \frac{d^2 \vartheta_1 \dots d^2 \vartheta_N}{(\pi q \Delta)^N} \exp\left[-\frac{\vartheta_1^2}{q \Delta} - \dots - \frac{(\vartheta_N - \vartheta_{N-1})^2}{q \Delta}\right], \quad (23.2)$$

где  $\Delta \approx \tau/N$ . С этой плотностью вероятности и должен быть усреднен функционал  $d\mathcal{E}[\vartheta(\tau)]/d\omega$ , причем при этом должен быть выполнен предельный переход к  $N \rightarrow \infty$ .

Таким образом, основное выражение для усредненного спектра излучения имеет вид

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathcal{P}_N \frac{d\mathcal{E}[\vartheta(\tau)]}{d\omega}. \quad (23.3)$$

Обычно такое выражение сокращенно записывают в виде функционального интеграла по винеровской мере

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \int d^2_{\mathcal{W}} \vartheta(\tau) \frac{d\mathcal{E}[\vartheta(\tau)]}{d\omega}. \quad (23.4)$$

Замечая, что

$$\vartheta^2(\tau) = \frac{\partial}{\partial \mu} \exp[\mu \vartheta^2(\tau)] \Big|_{\mu=0},$$

легко убедиться, что все слагаемые в подынтегральном выражении (23.4), содержащие обе компоненты вектора  $\vartheta = (\vartheta_x, \vartheta_y)$ , факторизуются, поэтому при вычислении величины  $\langle d\mathcal{E}/d\omega \rangle$  достаточно вычислить функциональный интеграл только по одной из компонент вектора  $\vartheta$ . При этом среднее значение

спектральной плотности излучения может быть представлено в виде

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = -\frac{e^2 k}{\pi} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} \left[ e^{-i\delta\tau} \left( \varepsilon^{-1} - v^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) Q_{\omega}^2 - e^{-2i\omega\tau} \left( \varepsilon^{-1} - v^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) Q_{-\omega}^2 \right] \Big|_{\mu \rightarrow 0}, \quad (23.5)$$

где

$$Q_{\omega} = \int d_w \vartheta(t) \exp \left\{ \mu \cdot \vartheta^2(\tau) - \frac{i\omega}{2} \int_0^{\tau} dt \vartheta^2(t) + \frac{i\omega}{2\tau} \left( \int_0^{\tau} dt \vartheta(t) \right)^2 \right\}. \quad (23.6)$$

Функциональный интеграл (23.6) имеет гауссов вид, поэтому он может быть вычислен аналитически с помощью известной процедуры вычисления таких интегралов [23]. Мы приведем здесь лишь результат вычисления (см. Приложение 1)

$$Q_{\omega} = \left\{ D(0) \left[ 1 - \frac{i\omega q}{2\tau} \int_0^{\tau} dt D^{-2}(t) \left( \int_0^{\tau} dt' D(t') \right)^2 \right] \right\}^{-1/2}, \quad (23.7)$$

где  $D(t) = \operatorname{ch} r(t-\tau) + (\mu q/\tau) \operatorname{sh} r(t-\tau)$  и  $r = \sqrt{i\omega q/2}$ .

Подставляя (23.7) в (23.5), легко показать, что с принятой точностью (отбрасываются слагаемые, пропорциональные  $\gamma^{-2}$  и  $(1-\varepsilon)$ )

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \frac{2e^2 \delta}{\pi} L \left\{ \operatorname{Im} \left( -r \int_0^{\infty} d\tau \operatorname{cth} r\tau e^{-i\delta\tau} \right) - \frac{\pi}{2} \right\}. \quad (23.8)$$

Сделав замену переменных  $z = r\tau$  и перейдя от интегрирования по комплексной переменной  $z$  к интегрированию по действительной переменной  $x = \operatorname{Re} z$  в пределах от 0 до  $\infty$  (см. рис. 3.3), запишем окончательно выражение для спектра излучения быстрой частицы в аморфной среде при  $\varepsilon v^2 < 1$  в виде

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \left( \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right)_0 \Phi_M(s_p) \frac{1}{2\gamma^2 (1-v\sqrt{\varepsilon})}, \quad (23.9)$$

где  $\Phi_M(s_p)$  — функция Мигдала, введенная в предыдущем параграфе,

$$s_p = \delta/2 \sqrt{2|r|} = \frac{1}{4} \gamma^2 (1-v\sqrt{\varepsilon}) \sqrt{\omega/\omega_{LP}}$$

и

$$\omega_{LP} = q\gamma^4/2.$$

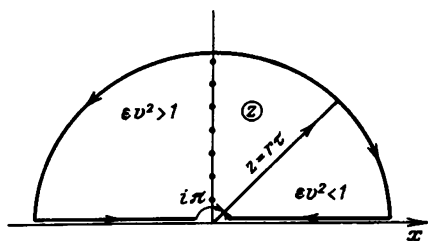


Рис. 3.3. Контуры интегрирования в формуле (23.8) при  $\epsilon v^2 < 1$  и  $\epsilon v^2 > 1$

к формуле, описывающей влияние многократного рассеяния на излучение Вавилова—Черенкова. Теория этого эффекта дана в работах [24—27].

### § 24. Метод функционального интегрирования в квантовой теории излучения

В предыдущих параграфах была развита классическая теория излучения быстрых заряженных частиц в аморфной среде, справедливая в области малых частот излученных фотонов. При этом была показана возможность использования метода функционального интегрирования для описания влияния многократного рассеяния на излучение. Покажем теперь, что метод функционального интегрирования может быть распространен и на область высоких частот излученных фотонов, когда их энергия сравнима с энергией частицы [28]. В этом случае существует квантовый эффект отдачи при излучении.

Как мы видели в § 17, в квазиклассическом приближении вероятность излучения быстрой частицы во внешнем поле с учетом отдачи при излучении может быть выражена через классическую траекторию частицы в этом поле. Так, просуммированная по поляризациям конечных и усредненная по поляризациям начальных частиц вероятность излучения электроном фотона определяется формулой (17.4), непосредственно зависящей от классической траектории. Эта формула справедлива, если энергии начального и конечного электронов велики, и, кроме того, если велика эффективная константа взаимодействия электрона с внешним полем. Последнее условие требуется для того, чтобы движение электрона в этом поле можно было трактовать классически. При движении в веществе это требование выполняется, если в пределах длины когерентности электрон сталкивается с большим числом атомов.

Траектория электрона в аморфной среде является случайной, поэтому вероятность излучения (17.4) должна быть усреднена по различным реализациям этой траектории. Учитывая, что в аморфной среде случайный процесс  $\mathcal{I}(\tau)$ , с которым связано рассеяние, представляет собой гауссов процесс, среднее значение

Формула (23.9) учитывает наряду с многократным рассеянием и влияние поляризации среды на излучение. При  $\epsilon = 1$  она переходит в формулу (22.8).

При  $\epsilon v^2 > 1$  для сходимости интеграла (23.8) контур интегрирования необходимо замыкать в сторону отрицательной полуоси  $x = \text{Re } z$  (см. рис. 3.3). При этом мы придем

вероятности излучения может быть записано в виде функционального интеграла по винеровской мере:

$$\left\langle \frac{dw}{d\omega} \right\rangle = \int d^2_W \vartheta(\tau) \frac{dw[\vartheta(\tau)]}{d\omega}. \quad (24.1)$$

Функционал  $dW[\vartheta(\tau)]/d\omega$ , подлежащий усреднению, имеет гауссов вид (17.4), поэтому вычисление функционального интеграла (24.1) может быть выполнено аналитически, так же как это было сделано при вычислении соответствующего функционального интеграла в классической теории (23.4). Результат вычисления имеет вид

$$\left\langle \frac{dw}{d\omega} \right\rangle = \left( \frac{dw}{d\omega} \right)_0 \frac{1}{4} \left\{ \frac{\omega^2}{E^2} G(s) + 2 \left[ 1 + \left( 1 - \frac{\omega}{E} \right)^2 \right] \Phi_M(s) \right\}, \quad (24.2)$$

где  $(dw/d\omega)_0 = \omega^{-1} (d\mathcal{E}/d\omega)_0$  — вероятность излучения в случае, когда эффект отдачи при излучении не учитывается;  $(d\mathcal{E}/d\omega)_0$  определяется формулой (22.7),  $s = 1/8 \sqrt{\omega/E^3 E' q}$ ;  $\Phi_M$  — функция Мигдала (22.8) и

$$G(s) = 48s^2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_0^\infty dx e^{-sx} \frac{\sin sx}{\operatorname{sh} x} \right). \quad (24.3)$$

Формула (24.2) обобщает соответствующий результат классической теории (23.9) на случай, когда существен эффект, связанный с отдачей при излучении. Она ранее была получена Мигдалом [14] на основе кинетического уравнения для матрицы плотности быстрой частицы в аморфной среде.

Рассмотрим некоторые предельные случаи формулы (24.2). С этой целью определим асимптотики входящих в (24.2) функций  $\Phi_M$  и  $G(s)$ . При малых и больших значениях параметра  $s$ , как легко проверить, эти функции определяются формулами

$$\Phi_M(s) \approx \begin{cases} 1 - \frac{0,012}{s^4}, & s \gtrsim 1, \\ 6s, & s \ll 1, \end{cases} \quad (24.4)$$

$$G(s) = \begin{cases} 1 - \frac{0,029}{s^4}, & s \gtrsim 1, \\ 12\pi s^2, & s \ll 1. \end{cases} \quad (24.5)$$

Таким образом, если  $s \gtrsim 1$ , то функции  $\Phi_M$  и  $G$  можно положить равными единице. При этом формула (24.2) с логарифмической точностью переходит в обычное выражение (18.5) для вероятности излучения электрона в аморфной среде. Многократное рассеяние в этом случае не оказывает влияния на излучение.

При  $s \ll 1$  имеет место другой предельный случай формулы (24.2):

$$\left\langle \frac{dw}{d\omega} \right\rangle \approx 3 \left( \frac{dw}{d\omega} \right)_0 \left[ 1 + \left( 1 - \frac{\omega}{E} \right)^2 \right] s. \quad (24.6)$$



Для мягких  $\gamma$ -квантов эта формула переходит в соответствующий результат классической теории (23.9).

Как уже отмечалось, имея формулу для вероятности излучения, учитывающую отдачу при излучении, можно получить формулу и для вероятности процесса образования электронно-позитронной пары фотоном. Для этого требуется только выполнить следующие замены в формуле (24.2) для вероятности излучения:

$$E \rightarrow -E_+, \quad E' \rightarrow E_-, \quad \omega \rightarrow -\omega, \quad d\omega \rightarrow \frac{E_+^2}{\omega^2} dE_+.$$

В результате находим, что вероятность образования пары в аморфной среде с учетом влияния многократного рассеяния имеет вид

$$\left\langle \frac{dw_{\pm}}{dE_+} \right\rangle = \left( \frac{dw_{\pm}}{dE_+} \right)_0 \left\{ \frac{\omega^2}{4E_+^2} G(\tilde{s}) + \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{\omega}{E_+} \right)^2 \right] \Phi(\tilde{s}) \right\}, \quad (24.7)$$

где

$$\left( \frac{dw_{\pm}}{dE_+} \right)_0 = \frac{E_+^2}{\omega^3} \frac{d\omega}{dE_+} \left( \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right)_0, \quad \tilde{s} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\omega}{E_+ E_- (E_+^2 q)}}$$

и функции  $G(\tilde{s})$  и  $\Phi(\tilde{s})$  определяются формулами (24.3) и (22.8). Входящая в  $s$  величина  $q$  относится к позитрону.

При  $\tilde{s} \gg 1$  функции  $\Phi$  и  $G$  близки к единице и формула (24.7) переходит в обычную формулу для вероятности образования пары в разреженной среде:

$$\left\langle \frac{dw_{\pm}}{dE_+} \right\rangle = \left( \frac{dw_{\pm}}{dE_+} \right)_0 \left\{ \frac{\omega^2}{4E_+^2} + \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{\omega}{E_+} \right)^2 \right] \right\}. \quad (24.8)$$

Если же  $\tilde{s} \ll 1$ , то в соответствии с (24.6) вероятность образования пары в среде оказывается много меньшей вероятности (24.8):

$$\left\langle \frac{dw_{\pm}}{dE_+} \right\rangle = 3 \left( \frac{dw_{\pm}}{dE_+} \right)_0 \left[ 1 + \left( 1 - \frac{\omega}{E_+} \right)^2 \right] \tilde{s}. \quad (24.9)$$

## § 25. Упругое рассеяние быстрой частицы в тонкой мишени

До сих пор при изучении радиационных процессов в аморфной среде мы предполагали, что толщина мишени  $L$  велика по сравнению с длиной когерентности  $l$ . Метод описания взаимодействия частицы с атомами среды в этом случае базировался на концепции функции распределения частиц в среде по координатам и углам, удовлетворяющей некоторому кинетическому уравнению. При достаточно высоких энергиях

$E$  и малых  $L$ , однако, всегда может быть выполнено обратное неравенство, когда процесс разыгрывается по длине  $l$ , значительно превосходящей толщину мишени:

$$l \gg L. \quad (25.1)$$

Несмотря на то что неравенство (25.1) выполняется в области очень высоких энергий частиц, данный случай представляет особый интерес. Связано это с тем, что при выполнении условия (25.1) вся мишень должна рассматриваться как единый объект, с которым происходит взаимодействие частицы. Этот объект содержит большое число атомов, поэтому важно знать характер интерференции во взаимодействии частицы с этими атомами.

При выполнении условия (25.1), как показано в гл. 2, вероятности таких процессов, как упругое рассеяние, излучение и образование электронно-позитронных пар, существенно упрощаются, что позволяет исследовать эти процессы простыми методами без введения дополнительной концепции о кинетическом уравнении, определяющем распределение частиц в среде по координатам и углам. Такое исследование удастся провести с единой точки зрения при движении частицы как в аморфной среде, где атомы расположены хаотично, так и в кристаллической среде, где расположение атомов является периодическим. Благодаря этому удастся выявить общие закономерности и отличительные особенности между процессами взаимодействия частицы с атомами среды в этих случаях.

Рассмотрим прежде всего упругое рассеяние быстрой частицы в тонком слое аморфного вещества [29] (взаимодействие частицы с кристаллической мишенью будет подробно рассмотрено в следующих главах). С этой целью обратимся к формулам (10.1) и (10.5) для сечения упругого рассеяния в эйкональном приближении, которые справедливы в области высоких энергий при выполнении условия (25.1). Запишем это сечение в виде

$$d\sigma = F(\mathbf{q}_\perp) d^2 q_\perp, \quad (25.2)$$

где  $\mathbf{q}_\perp$  — поперечные компоненты переданного импульса  $\mathbf{q}$  и

$$F(\mathbf{q}_\perp) = \frac{1}{4\pi^2} \int d^2 \rho d^2 \rho' \exp \{i\mathbf{q}(\rho - \rho') + i[\chi_0(\rho) - \chi_0(\rho')]\}. \quad (25.3)$$

Входящая сюда величина  $\chi_0(\rho)$  определяется соотношением (10.6)

$$\chi_0(\rho) = -\frac{1}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} dz U(\rho, z).$$

В среде потенциальная энергия  $U(\mathbf{r})$  представляет собой сумму потенциальных энергий взаимодействия частицы с различными атомами:

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N u(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n), \quad (25.4)$$

где  $N$  — число атомов и  $\mathbf{r}_n$  — радиус-вектор положения  $n$ -го атома в среде. Подставляя потенциальную энергию (25.4) в (10.6), приходим к следующему выражению для  $F$ :

$$F = \frac{1}{4\pi^2} \int d^2\rho d^2\rho' e^{i\mathbf{q}(\rho - \rho')} \times \prod_{n=1}^N \exp \{i[\chi(\rho - \rho_n) - \chi(\rho' - \rho_n)]\}, \quad (25.5)$$

$$\text{где } \chi(\rho - \rho_n) = -\frac{1}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} dz u(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n).$$

В аморфной среде атомы расположены хаотично, поэтому формула (25.5) должна быть усреднена по положениям атомов. Учитывая, что в рассматриваемом случае положения атомов в среде равновероятны, запишем среднее значение функции  $F$  в виде

$$\bar{F} = \int \dots \int \prod_{n=1}^N \left( \frac{d^2\rho_n}{S} \right) F(\mathbf{q}_1; \rho_1, \dots, \rho_N), \quad (25.6)$$

где  $S$  — площадь поверхности мишени, по которой производится усреднение. Интегрирование по каждой переменной  $\rho_n$  здесь проводится в пределах поверхности  $S$ .

Выполнив в (25.6) замену переменных  $\rho_n \rightarrow \rho_n + \rho'$  и  $\rho \rightarrow \rho + \rho'$ , получим

$$\bar{F} = \frac{S}{4\pi^2} \int d^2\rho e^{i\mathbf{q}\rho} \int \dots \int \prod_{n=1}^N \left( \frac{d^2\rho_n}{S} \right) \times \exp [i(\chi(\rho - \rho_n) - \chi(\rho_n))]. \quad (25.7)$$

Таким образом, для нахождения среднего значения функции  $F$  необходимо вычислить величину

$$g(N) = \int \dots \int \prod_{n=1}^N \left( \frac{d^2\rho_n}{S} \right) \exp \{i[\chi(\rho - \rho_n) - \chi(\rho_n)]\}. \quad (25.8)$$

Эта величина удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению:

$$g(N+1) - g(N) = g(N) \int \frac{d^2\rho_1}{S} \{ \exp [i(\chi(\rho - \rho_1) - \chi(\rho_1))] - 1 \}. \quad (25.9)$$

Функция  $g(N)$  медленно изменяется с ростом  $N$ , поэтому при больших  $N (N \gg 1)$  левую часть соотношения (25.9) можно представить в виде

$$g(N+1) - g(N) \approx \frac{d}{dN} g(N).$$

Замечая, что

$$\int d^2 \rho_1 \{ \exp [i(\chi(\rho - \rho_1) - \chi(\rho_1))] - 1 \} = \int d\sigma(\mathbf{q}) [1 - J_0(q\rho)],$$

где  $d\sigma(\mathbf{q})$  — дифференциальное сечение упругого рассеяния быстрой частицы отдельным атомом среды (20.2), приходим к следующему уравнению для определения функции  $g(N)$ :

$$\frac{d}{dN} g(N) = g(N) \int d\sigma(q) [1 - J_0(q\rho)]. \quad (25.10)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию  $g(N)|_{x=0} = 1$ , имеет вид

$$g(N) = \exp \left\{ \frac{N}{S} \int d\sigma(q) [1 - J_0(q\rho)] \right\}. \quad (25.11)$$

В результате находим, что

$$\bar{F}(q_{\perp}) = \frac{S}{4\pi^2} \int d^2 \rho \exp \{ i\mathbf{q}\rho + nL \int d\sigma(q') [1 - J_0(q'\rho)] \}, \quad (25.12)$$

где  $n = N/SL$  — плотность атомов в мишени.

Функция  $\bar{F}(q_{\perp})$  определяет распределение рассеянных мишенью частиц по переданным импульсам. Угол рассеяния  $\vartheta$  связан с  $q_{\perp}$  соотношением  $q_{\perp} = p\vartheta$ .

Сравнивая формулы (25.12) и (20.3) для  $\bar{F}(q_{\perp})$  и для функции распределения быстрых частиц в аморфной среде по углам, видим, что эти формулы только множителем  $S$  отличаются друг от друга. По этой причине различные предельные случаи, рассмотренные в § 20 применительно к формуле (20.3), справедливы и применительно к формуле (25.12). В частности, при  $nL\sigma_e \ll 1$

$$\bar{F} = N \frac{d^2 \sigma(q_{\perp})}{d^2 q_{\perp}}, \quad N = nLS, \quad (25.13a)$$

а при  $nL\sigma_e \gg 1$

$$\bar{F} = S \frac{4\pi}{q^2} \exp \left( -\frac{q^2}{q^2} \right), \quad \overline{q^2} = nLp^2 \int d\sigma(\chi) \chi^2. \quad (25.13b)$$

Подчеркнем, что при выводе формулы (25.12) мы усредняли сечение упругого рассеяния частицы мишенью, амплитуда которого определялась непосредственно через суммарную потенциальную энергию ее взаимодействия со всеми атомами

среды. Иными словами, при выполнении условия (25.1) вся мишень поступает как единый объект, с которым происходит взаимодействие. Элемент случайности при этом учитывался путем усреднения общей формулы для сечения рассеяния (25.2) по положениям атомов в среде. При выводе же формулы (20.3) элемент случайности содержался в самом понятии функции распределения, которая удовлетворяет кинетическому уравнению (20.1). В это уравнение входит энергия взаимодействия частицы только с одним атомом среды.

Подчеркнем также, что как в § 20, так и в настоящем параграфе, мы учитывали многократное рассеяние частицы на атомах среды, но в настоящем параграфе оно учитывалось путем усреднения сечения рассеяния, тогда как в § 20 — путем введения функции распределения. Таким образом, если  $L \ll l$ , то можно усреднять некоторую экспоненту, содержащую сумму случайных величин, в то время как при  $L \gg l$  необходимо решать некоторое интегральное уравнение. Формулы для распределений частиц по углам, полученные в этих предельных случаях, однако, полностью совпадают.

## § 26. Излучение и образование электронно-позитронных пар в тонком слое вещества

Перейдем теперь к изучению процесса излучения ультрарелятивистского электрона в тонком слое вещества в случае, когда формирование излучения происходит в пространственной области, размер которой превосходит толщину мишени:  $l \gg L$ . При выполнении этого условия, как показано в § 14, сечение излучения представляет собой произведение вероятности излучения на сечение упругого рассеяния частицы мишенью. Входящая в (14.8) вероятность излучения (12.15) определяется только величиной импульса  $q_{\perp}$ , переданного внешнему полю, независимо от того, в какой среде происходит излучение. От свойств среды зависит лишь сечение упругого рассеяния, поэтому в рассматриваемом случае ( $l \gg L$ ) сечение излучения электрона в аморфной среде может быть записано в виде

$$\frac{d\sigma_a}{d\omega} = \int d^2 q_{\perp} \bar{F}(q_{\perp}) \frac{dw(q_{\perp})}{dq_{\perp}}, \quad (26.1)$$

где  $\bar{F}(q_{\perp})$  — функция (25.12), определяющая распределение частиц по переданным импульсам.

Рассмотрим некоторые предельные случаи этой формулы. При  $L \rightarrow 0$  функция  $F(q_{\perp})$  определяется соотношением (25.13а). Сечение излучения (26.1) в этом случае равно

$$d\sigma_a = N d\sigma_{\text{вн}}, \quad (26.2)$$

где  $d\sigma_{\text{ВН}}$  — сечение излучения электрона в поле отдельного атома (10.18) и  $N$  — число атомов в мишени.

С ростом толщины мишени вследствие многократного рассеяния распределение частиц по  $q_{\perp}$  приобретает гауссов вид (25.136). Подставляя это распределение в (26.1), получим

$$\frac{d\sigma_a}{d\omega} = S \int d^2 q_{\perp} \frac{4\pi}{q^2} \exp\left(-\frac{q_{\perp}^2}{q^2}\right) \frac{dw(q_{\perp})}{d\omega}. \quad (26.3)$$

При этом если  $\overline{q^2} \ll m^2$ , то

$$\frac{d\sigma_a}{d\omega} = S \frac{2e^2}{3\pi\omega} \frac{E'}{E} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\omega^2}{EE'}\right) \frac{\overline{q_{\perp}^2}}{m^2}. \quad (26.4)$$

Сечение излучения в этом случае с логарифмической точностью совпадает с соответствующим результатом Бете и Гейтлера (26.2) для разреженной среды.

При выполнении условия  $\overline{q_{\perp}^2} \gg m^2$  согласно (12.16)

$$\frac{d\sigma_a}{d\omega} = S \frac{2e^2}{\pi\omega} \frac{E'}{E} \left(1 + \frac{\omega^2}{2EE'}\right) \ln \frac{\overline{q_{\perp}^2}}{m^2}. \quad (26.5)$$

Сечение излучения в этом предельном случае практически не зависит от толщины мишени. Это означает, что при  $\gamma^2 \overline{q^2} \gg 1$  интенсивность излучения электрона практически не зависит от числа его соударений с атомами среды. При этом сечение излучения  $d\sigma_0 = d\sigma_a/N$ , приходящееся на один атом среды, оказывается меньшим сечения излучения  $d\sigma_{\text{ВН}}$  на изолированном атоме, т. е. в этом случае имеет место эффект подавления излучения.

Таким образом, мы видим, что многократное рассеяние электрона в тонком слое аморфного вещества приводит к существенному отличию поперечника излучения  $d\sigma_0$  от поперечника излучения  $d\sigma_{\text{ВН}}$  на изолированном атоме. Это отличие возникает, когда среднее значение квадрата переданного импульса  $\overline{q_{\perp}^2}$  превышает величину  $m^2$ . При этом характерные значения углов рассеяния частицы мишенью  $\sqrt{\overline{\vartheta^2}}$  превышают характерное значение угла излучения релятивистской частицы  $\theta \sim m/E$ .

Отметим, что условия возникновения эффекта подавления излучения в тонком ( $L \ll l$ ) и в толстом ( $L \gg l$ ) слое вещества одинаковы. Формулы, описывающие эти эффекты, однако, существенно различаются: формула (21.2), относящаяся к эффекту Ландау и Померанчука, существенно зависит от толщины мишени  $L$ , энергии электрона  $E$  и частоты  $\omega$  излученного фотона ( $\mathcal{E}'_{LP} \sim L \sqrt{\omega/E}$ ); в формуле же (26.5), описывающей подавление излучения в тонком слое вещества, такие зависимости отсутствуют.

Длина когерентности при высоких энергиях частиц может превысить толщину мишени не только в процессе излучения, но и в процессе фотообразования электронно-позитронных пар. Формулы для сечения этого процесса могут быть получены из приведенных выше формул для сечения излучения, если в последних выполнить замены

$$E \rightarrow -E_+, \quad E' \rightarrow E_-, \quad \omega \rightarrow -\omega, \quad d\omega \rightarrow \frac{E_+^2}{\omega^2} dE_+.$$

При этом, если  $\overline{q^2} \ll m^2$ , то

$$\frac{d\sigma_{\pm}}{dE_+} \approx S \frac{2e^2}{3\pi\omega^3} \left( E_- E_+ + \frac{3}{4}\omega^2 \right) \frac{\overline{q^2}}{m^2}. \quad (26.6)$$

Если же  $\overline{q^2} \gg m^2$ , то

$$\frac{d\sigma_{\pm}}{dE_+} \approx S \frac{e^2}{\omega^3} (E_-^2 + E_+^2) \ln \frac{\overline{q_1^2}}{m^2}. \quad (26.7)$$

Таким образом, как и в процессе излучения, при  $\overline{q_1^2} \ll m^2$  сечение образования пары линейно растет с толщиной и с логарифмической точностью совпадает с соответствующим результатом Бете и Гайтлера для разреженной среды  $d\sigma_{\pm} \approx \approx Nd\sigma_{\text{ВН}}^{\pm}$ , а при  $\overline{q_1^2} \gg m^2$  это сечение практически не зависит от толщины мишени. Изменение характера образования пары происходит в случае, когда среднее значение квадрата переданного импульса  $\overline{q_1^2}$  становится сравнимым с  $m^2$ . Значения характерных углов рассеяния в мишени частиц образовавшейся пары в этом случае сравнимы с углом порядка  $m/E_{\pm}$ .

## ТЕОРИЯ КОГЕРЕНТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И ОБРАЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННО-ПОЗИТРОННЫХ ПАР ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ В КРИСТАЛЛАХ

### § 27. Сечение излучения в первом борновском приближении

Перейдем теперь к рассмотрению тормозного излучения релятивистских частиц, движущихся в кристаллических средах. Существенным при этом является то, что в кристаллических средах могут проявляться когерентные и интерференционные эффекты в излучении. Благодаря этим эффектам интенсивность излучения частиц в кристалле может сильно отличаться от интенсивности излучения частиц, движущихся в аморфной среде.

Первые теоретические попытки предсказать эти явления принадлежат Вильямсу [1], который в своей работе, посвященной методу эквивалентных фотонов, обратил внимание на то, что периодичность среды может оказать существенное влияние на величину сечения тормозного излучения при высоких энергиях. Правильные критерии появления эффекта и количественные формулы, его описывающие, были получены, однако, только в работах Ферретти [2], Тер-Микаеляна [3, 4] и Юбералла [5], спустя почти двадцать лет после опубликования работы [1]. Физическая причина возникновения эффекта была установлена Тер-Микаеляном [3, 4], который обнаружил, что при высоких энергиях тормозное излучение формируется на большом пути вдоль траектории частицы и что если длина формирования излучения (длина когерентности) станет сравнимой или превысит постоянную решетки, то влияние периодической структуры на излучение может оказаться существенным и его необходимо учитывать. Основные предсказания теории когерентного излучения электронов высоких энергий в кристаллах впоследствии были подтверждены во многих экспериментах (см. обзоры [6—10]). Область применимости теории установлена в работах [11—14].

Ниже мы изложим теорию процессов когерентного излучения и образования электронно-позитронных пар при высоких энергиях в кристаллах. Основное внимание при этом мы обратим на изучение процесса когерентного взаимодействия быстрых частиц с кристаллом в различных условиях, а также на выяснение области применимости теории и выявление общих закономерностей и отличительных особенностей между процессами излучения релятивистских частиц в кристаллах, аморфных средах и в интенсивных внешних электромагнитных полях.



Когерентные и интерференционные эффекты в излучении могут проявляться при значительных энергиях фотона ( $\omega \sim E$ ), поэтому для исследования этих эффектов недостаточно классической теории, а необходима, вообще говоря, квантовая теория излучения. В квантовой теории излучения простейшим приближением является борновское приближение, с изложения которого мы и начнем.

В борновском приближении дифференциальное сечение торозного излучения определяется квадратом модуля фурье-компоненты потенциальной энергии взаимодействия частицы (электрона или позитрона) с внешним полем  $U_q$ , где  $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}' - \mathbf{k}$  — импульс, переданный внешнему полю,  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$  — импульсы частицы в начальном и в конечном состояниях,  $\mathbf{k}$  — импульс фотона. При движении электрона в кристалле его потенциальная энергия имеет вид

$$U(\mathbf{r}) = \sum_n u(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n), \quad (27.1)$$

где  $u(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)$  — потенциальная энергия взаимодействия электрона с атомом решетки, находящимся в точке  $\mathbf{r}_n$ . Квадрат фурье-компоненты этого выражения равен

$$|U_q|^2 = |u_q|^2 \left| \sum_n e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_n} \right|^2, \quad u_q = \int d^3r e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} u(\mathbf{r}). \quad (27.2)$$

При этом дифференциальное сечение излучения частицы в кристалле будет отличаться от сечения излучения на изолированном атоме  $\sigma'_0(\mathbf{q}) = d^4\sigma/d\omega d^3q$ , выраженного через компоненты переданного импульса  $\mathbf{q}$ , только множителем:

$$\sigma' = \left| \sum_n e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_n} \right|^2 \sigma'_0(\mathbf{q}). \quad (27.3)$$

Отметим, что весь кристалл в рассматриваемом случае выступает как единый объект, с которым происходит взаимодействие частицы. В результате этого сечение излучения на совокупности  $N_0$  всех атомов кристалла, вообще говоря, не сводится к сумме сечений излучения на  $N_0$  изолированных центрах, как это имеет место в разреженной аморфной среде.

Положения атомов в решетке  $\mathbf{r}_n$  вследствие термодинамических флуктуаций всегда имеют некоторый разброс  $\mathbf{u}_n$  относительно своих равновесных положений  $\mathbf{r}_n^0$ . Полагая в (27.3)  $\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n^0 + \mathbf{u}_n$ , получим после усреднения по тепловым колебаниям атомов в решетке \*)

$$\sigma'(\mathbf{q}) = \{N_0(1 - e^{-\mathbf{q}^2 \bar{u}^2}) + e^{-\mathbf{q}^2 \bar{u}^2} \left| \sum_n e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_n^0} \right|^2\} \sigma'_0(\mathbf{q}), \quad (27.4)$$

где  $\bar{u}^2$  — средний квадрат амплитуды тепловых колебаний атомов в решетке вдоль одной из осей.

Здесь предполагается, что колебания отдельных атомов

\*) Формула (27.4) впервые была получена Тер-Микаеляном [4].

в решетке происходят независимо. Величина  $\overline{u^2}$  определяется соотношением [7]

$$\overline{u^2} = \frac{3}{4Mk\Theta_D} \left[ 1 + 4 \left( \frac{T^0}{\Theta_D} \right)^2 \int_0^{\Theta_D/T^0} \frac{y dy}{e^y - 1} \right], \quad (27.5)$$

где  $M$  — масса атома решетки,  $T^0$  — температура кристалла,  $\Theta_D$  — температура Дебая и  $k$  — постоянная Больцмана. Значения  $\sqrt{\overline{u^2}}$  при комнатной температуре ( $T^0 = 293$  К) для некоторых кристаллов представлены в табл. 4.1.

Последнее слагаемое в (27.4) определяет когерентные эффекты, а первые два — некогерентные эффекты в излучении. При этом первое слагаемое приводит к известной формуле Бете и Гайтлера для сечения излучения на  $N_0$  независимых центрах. В сечение излучения на отдельном атоме основной вклад вносят импульсы  $q$ , лежащие в интервале  $R^{-1} \lesssim q \lesssim m$ . Второе и третье слагаемые в (27.4) будут существенны в сечении, если  $q^2 \overline{u^2} \lesssim 1$ . Так как  $m^2 \overline{u^2} \gg 1$ , то согласно (27.4) кристаллическая решетка будет сказываться на излучении в том случае, если  $q \ll m$ . В этой области переданных импульсов сечение излучения  $\sigma'_0(\mathbf{q})$  определяется формулой (см. § 12)

$$\sigma'_0(\mathbf{q}) = \frac{e^2 \delta'}{4\pi^3 m^2 \omega E} \frac{E'}{q_1^2} \left\{ 1 + \frac{\omega^2}{2EE'} - 2 \frac{\delta}{q_1} \left( 1 - \frac{\delta'}{q_1} \right) \right\} |u_q|^2, \quad (27.6)$$

где  $q_{\parallel}$  и  $q_{\perp}$  — компоненты переданного импульса, параллельная и ортогональные  $\mathbf{p}$ . Величина  $|\sum \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}_n)|^2$  (см. (27.4)) есть интерференционный фактор Лауэ — Брэгга, входящий также в сечение дифракционного рассеяния рентгеновских лучей и нейтронов в кристаллах [15, 16]. В простейшем случае, когда атомы в решетке расположены вдоль осей  $z$ ,  $y$  и  $x$  на

Таблица 4.1. Величины, определяющие структуру решетки некоторых элементов, имеющих кубическую решетку

Элемент	Атомная масса	$R, \text{Å}$	$a, \text{Å}$	$\Theta_D, \text{K}$	$\sqrt{\overline{u^2}}, \text{Å}$ (при 293 К)	$\frac{B}{\ln 183Z^{-1/3}}$	Тип решетки
C 6	12	0,258	3,567	2000	0,04	0,25	<i>fcc</i> (d)
Si 14	28,1	0,194	5,431	543	0,075	0,11	<i>fcc</i> (d)
Ge 32	72,6	0,148	5,657	290	0,085	0,067	<i>fcc</i> (d)
Nb 41	92,9	0,136	3,300	275	0,079	0,0676	<i>bcc</i>
W 74	183,8	0,112	3,165	310	0,050	0,105	<i>bcc</i>
Pb 82	207,7	0,108	4,951	88	0,164	0,093	<i>fcc</i>

*fcc* — кубическая гранецентрированная решетка;  
*fcc* (d) — две *fcc* решетки, сдвинутые друг относительно друга вдоль пространственной диагонали куба на четверть длины;  
*bcc* — кубическая объемноцентрированная решетка.

одинаковых расстояниях  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  друг от друга (рис. 4.1), этот фактор равен

$$\left| \sum_n e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_n^0} \right|^2 = \prod_{i=1}^3 \frac{\sin^2 N_i q_i a_i / 2}{\sin^2 q_i a_i / 2}, \quad (27.7)$$

где  $N_i$  — числа атомов вдоль осей  $z$ ,  $y$  и  $x$ . При больших значениях  $N_i$  (требуется, чтобы в области характерных значений переменных  $q_i$  выполнялись неравенства  $N_i q_i a_i \gg 1$ ) соотношение (27.7) может быть записано в виде

$$\left| \sum_n e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_n^0} \right|^2 = N_0 \frac{(2\pi)^3}{\Delta} \sum_g \delta(\mathbf{q} - \mathbf{g}), \quad (27.8)$$

где  $\Delta = a_1 a_2 a_3$  — объем элементарной ячейки,  $\delta(\mathbf{q})$  — трехмерная дельта-функция и  $\mathbf{g}$  — вектор обратной решетки

$$(\mathbf{g}_i = 2\pi n_i / a_i, \quad n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Используя формулы (27.6) и (27.8), сечение излучения электрона в кристалле можно представить в виде

$$d\sigma = N_0 (d\sigma_n + d\sigma_c), \quad (27.9)$$

где  $d\sigma_n$  — сечение некогерентного излучения,

$$d\sigma_n = d\sigma_{\text{ВН}} - d\sigma_1, \quad d\sigma_1 = d\omega \int d^3 q \exp(-q^2 \bar{u}^2) \sigma'_0(\mathbf{q}) \quad (27.10)$$

и  $d\sigma_c$  — сечение когерентного излучения:

$$d\sigma_c = \frac{2e^2 \delta' d\omega}{m^2 \Delta} \frac{E'}{\omega} \frac{E'}{E} \sum_g \frac{g_{\parallel}^2}{g_{\perp}^2} \left[ 1 + \frac{\omega^2}{2EE'} - 2 \frac{\delta'}{g_{\parallel}} \left( 1 - \frac{\delta'}{g_{\parallel}} \right) \right] |u_g|^2 e^{-g^2 \bar{u}^2}, \quad (27.11)$$

причем  $g_{\parallel} \geq \delta'$ .

Если в (27.9) выполнить формальный переход к  $\bar{u}^2 \rightarrow \infty$ , то

$$d\sigma = N_0 d\sigma_{\text{ВН}}. \quad (27.12)$$

Рассмотрим теперь поправку  $d\sigma_1$  к формуле для некогерентной части поперечника излучения. Для простоты будем считать, что потенциал отдельного атома кристалла представляет собой экранированный потенциал Кулона (7.5). В этом случае, как легко проверить,

$$d\sigma_1 = \frac{16Z^2 e^6}{3m^2} \frac{d\omega}{\omega} \left( 1 - \frac{\omega}{E} + \frac{3\omega^2}{4E^2} \right) B, \quad (27.13)$$

где

$$B = \int_0^{\infty} \frac{q^3 dq}{(q^2 + R^{-2})^2} e^{-q^2 \bar{u}^2}. \quad (27.14)$$

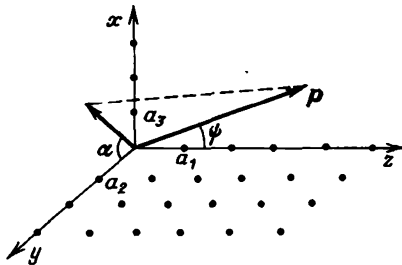


Рис. 4.1. Ориентация кристаллографических осей относительно падающего пучка

Сравнивая формулы (12.18) и (27.13), видим, что относительное уменьшение сечения некогерентного излучения электрона в кристалле по сравнению с сечением излучения на изолированном атоме  $d\sigma_{\text{вн}}$  определяется параметром  $B/\ln(183Z^{-1/3})$ . Эта величина для некоторых элементов представлена в табл. 4.1. Из таблицы видно, что  $d\sigma_1$  приводит к поправке к формуле Бете и Гайтлера порядка  $5 \div 25\%$ . Таким образом, сечение  $d\sigma_n$  мало отличается от сечения  $d\sigma_{\text{вн}}$ .

Перейдем теперь к анализу сечения  $d\sigma_c$ . Основной вклад в это сечение вносят значения  $g_{\parallel} \sim \delta'$ . Этим значениям  $g_{\parallel}$  соответствуют продольные расстояния  $l'_c \sim 1/\delta'$ , на которых формируется процесс излучения. Если формально считать постоянные решетки  $a_i$  очень большими ( $a_i \rightarrow \infty$ ,  $i=1, 2, 3$ ), то суммирование по  $g$  в (27.11) сведется к интегрированию по  $\Delta(2\pi)^{-3} d^3g$ . При этом  $d\sigma_c = d\sigma_1$  и формула (27.9) для сечения излучения примет вид  $d\sigma = N_0 d\sigma_{\text{вн}}$ . Этот случай соответствует условиям  $l_c \ll a_i$ . При нарушении этих условий, как будет показано ниже, сечение  $d\sigma_c$  может существенно отличаться и от  $d\sigma_{\text{вн}}$ , и от  $d\sigma_1$ . Поэтому мы в дальнейшем будем интересоваться, главным образом, сечением  $d\sigma_c$ .

## § 28. Влияние периодичности в расположении атомов на излучение

Рассмотрим вопрос о влиянии периодичности расположения атомов в решетке на излучение релятивистского электрона. С этой целью сперва остановимся на простейшем случае прохождения электрона через тонкий кристалл вдоль одной из его кристаллических осей (оси  $z$ ) [12]. Толщина кристалла вдоль оси  $z$  предполагается малой по сравнению с поперечными размерами кристалла (оси  $x$  и  $y$ ). Что касается длины когерентности процесса излучения, то в настоящем разделе будем предполагать, что она может быть как малой, так и большой по сравнению с размерами кристалла вдоль оси  $z$ . Сечение когерентного излучения в этом случае, согласно (27.4) и (27.7), может быть записано в виде

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = N_2 N_3 \frac{4\pi^2}{a_2 a_3} \sum_{g_1} \int_{\delta'}^{\infty} dg_1 \frac{\sin^2 N_1 g_1 a_1 / 2}{\sin^2 g_1 a_1 / 2} \sigma'_0(g) e^{-g^2 u^2}, \quad (28.1)$$

где сечение  $\sigma'_0(g)$  определяется соотношением (27.6).

Суммируемая в (28.1) функция является плавной функцией переменных  $g_2$  и  $g_3$ , поэтому сумма по  $g_2$  и  $g_3$  в (28.1) может быть заменена на соответствующий интеграл:

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = N_2 N_3 \int d^3g \frac{\sin^2 N_1 g_1 a_1 / 2}{\sin^2 g_1 a_1 / 2} \sigma'_0(\mathbf{g}) e^{-\mathbf{g}^2 u^2}. \quad (28.2)$$

Формула (28.2) показывает, что периодичность решетки в поперечном направлении в рассматриваемом случае не оказывает влияния на излучение. Сечение излучения (28.1) представляет собой сумму сечений излучения электрона на  $(N_2 N_3)$  цепочках атомов кристалла, расположенных параллельно оси  $z$ , причем излучение на каждой из этих цепочек можно считать независимым.

При  $l_c \gg N_1 a_1$  отношение квадратов синусов под знаком интеграла в (28.2) равно  $N_1^2$  (поскольку  $g_1 \sim \delta'$ ), и, следовательно, в этом случае имеет место когерентность излучения:

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = N_2 N_3 N_1^2 \frac{d\sigma_1}{d\omega}. \quad (28.3)$$

Отметим, что при  $l_c \gg N_1 a_1$  расположение атомов в цепочках не влияет на когерентный характер излучения — сечение пропорционально  $N_1^2$  как при расположении атомов на равных расстояниях друг от друга, так и на неравных расстояниях.

Если же  $N_1 a_1 \lesssim l_c$ , то отношение квадратов синусов не приводит к появлению множителя  $N_1^2$  и когерентность нарушается (при  $l_c \gg N_1 a_1$  разность фаз последовательно излученных волн мала по сравнению с  $\pi$ , поэтому амплитуды волн складываются и сечение излучения пропорционально  $N_1^2$ , а когда  $N_1 a_1 \lesssim l_c$ , излученные волны могут частично погашать друг друга).

Если же  $N_1 a_1 \gg l_c$ , то можно воспользоваться формулой

$$\frac{\sin^2 Naq/2}{\sin^2 aq/2} = N \frac{2\pi}{a} \sum_g \delta(q-g),$$

и мы получим

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = N_0 \frac{2\pi}{a_1} \sum_{g_1 \geq \delta'} \int d^2 g_1 \sigma'_0(g) e^{-g^2 a_1^2}. \quad (28.4)$$

Определим величину входящей сюда суммы по  $g_1$ . Рассмотрим прежде всего случай  $l_c \ll a_1$ . Суммирование при этом начинается в (28.4) со значения  $n_{\min} \approx a_1 \delta'/2\pi$ , которое значительно больше единицы. Поэтому речь идет о суммировании ряда  $\sum_{k=n}^{\infty} f(k)$ , где  $n \gg 1$  и функция  $f(k)$  быстро убывает с ростом  $k$ . Такая сумма может быть заменена интегралом [17]

$$\sum_{k=n}^{\infty} f(k) = \int_n^{\infty} dx f(x) + O(f(n)). \quad (28.5)$$

Таким образом, при  $a_1 \gg l_c$  приходим к результату

$$d\sigma = N_0 d\sigma_1. \quad (28.6)$$

Подставляя это соотношение в (27.9), видим, что при  $a_1 \gg l_c$  сечение излучения быстрой частицы, движущейся в кристалле вдоль кристаллографической оси, не отличается от сечения

излучения в разреженной аморфной среде. Излучение на отдельных атомах кристалла в этом случае происходит независимо.

Пусть теперь  $a_1 \ll l_c \ll Na_1$ , т. е. длина когерентности значительно больше расстояния между атомами, но меньше толщины кристалла.

Тогда суммирование в (28.4) следует начинать с  $n_{\min} = 1$ . Так как  $\sigma'_0(g_1) \sim (a_1 \delta') n^{-2}$ , то главный вклад в сумму по  $g_1$  вносят лишь несколько первых членов. Поэтому теперь

$$d\sigma \sim N_0(a_1 \delta') d\sigma_1. \quad (28.7)$$

Мы видим, что при  $a_1 \ll l_c \ll N_1 a_1$  излучение частицы, движущейся вдоль кристаллографической оси, содержит малый множитель  $(a_1 \delta')$ , который отсутствует при излучении быстрой частицы в аморфной среде. Здесь сказываются периодическая структура кристалла вдоль оси  $z$  и большая толщина кристалла по сравнению с длиной когерентности.

Рассмотрим, наконец, тот случай, когда размеры зоны формирования излучения сравнимы с расстоянием между атомами кристалла:  $a_1 \sim l_c \ll N_1 a_1$ . Характерным при этом является то, что для некоторых значений параметра  $(a_1 \delta')$  возникают значительные изменения сечения излучения. Дело в том, что при  $2\pi/a_1 = \delta'$  суммирование в (28.4) следует начинать с  $n_{\min} = 1$ . Если же  $4\pi/a_1 > \delta' > 2\pi/a_1$ , то суммирование уже следует начинать с  $n = 2$  и т. д. Поэтому при  $2\pi/a_1 = \delta'$  происходит скачок сечения излучения — из суммы по  $n$  выпадает вклад слагаемого с  $n = 1$ . Этот скачок можно легко найти при  $\omega \ll E$ :

$$\frac{d\sigma(2\pi/a_1 \geq \delta')}{d\sigma(4\pi/a_1 > \delta' > 2\pi/a_1)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}(1-2n^{-1}+2n^{-2})}{\sum_{n=2}^{\infty} n^{-2}(1-2n^{-1}+2n^{-2})} \approx 3,5.$$

Аналогично при  $4\pi/a_1 = \delta'$  сечение излучения изменяется в 2,02 раза, при  $6\pi/a_1 = \delta'$  — в 1,35 раза и т. д. Графическая зависимость  $d\sigma/d\omega$  от параметра  $a_1 \delta'/2\pi$  приведена на рис. 4.2.

Рассмотрим еще один важный случай при движении частицы вдоль одной из кристаллографических осей. Пусть частица проходит через кристалл вдоль оси  $z$  и периодически сталкивается на своем пути с несколькими группами атомов (рис. 4.3). Расстояние  $\mathcal{D}$  между группами атомов вдоль оси  $z$  будем считать большим по сравнению с длиной каждой цепочки ( $\mathcal{D} \gg N_1 a_1$ ,

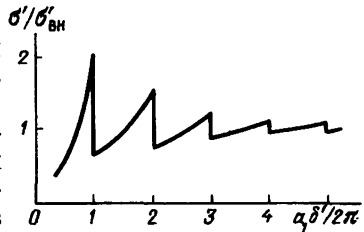


Рис. 4.2. Зависимость сечения излучения от частоты в области интерференционных максимумов ( $\sigma' = d\sigma/d\omega$ )

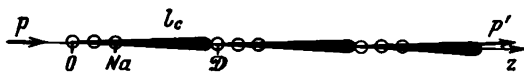


Рис. 4.3. Излучение при периодических столкновениях электрона с группами атомов

где  $N_1$  — число атомов в каждой цепочке). Тогда при выполнении условия  $l_c \sim \mathcal{D}$  излучение электрона на каждой группе атомов будет происходить когерентно, как на одном центре с эффективным зарядом  $N_1 Z|e|$ , но между излучениями частицы на различных цепочках будет проявляться интерференция. Иными словами, в этом случае будут иметь место как когерентный, так и интерференционный эффекты в излучении. При этом сечение когерентного излучения будет определяться формулой

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = N_0 N_1 \frac{2\pi}{\mathcal{D}} \sum_{G \geq \delta'} \int d^2 g_{\perp} \sigma'_0(G, \mathbf{g}_{\perp}) e^{-g_{\perp}^2 u^2}, \quad (28.8)$$

где  $G = 2\pi n/\mathcal{D}$ .

Основные результаты, полученные в этом параграфе, даны в табл. 4.2.

Ниже будет показано, что установленные выше закономерности влияния периодичности расположения атомов в решетке на излучение будут проявляться и при прохождении частицы через кристалл под ненулевыми углами к кристаллическим осям. При этом в зависимости от ориентации кристаллических осей относительно подающего пучка может быть реализована та или иная ситуация из рассмотренных выше.

### § 29. Излучение при движении электрона вблизи кристаллографической оси (борновское приближение)

Сечение когерентного излучения (27.11) определяется суммой по векторам обратной решетки, причем эта сумма ограничена условием

$$g_{\parallel} \geq \delta'. \quad (29.1)$$

Условие (29.1) означает, что с увеличением  $\delta'$  из суммы по  $\mathbf{g}$  в (27.11) выпадают вклады некоторых слагаемых. Если движение частицы происходит в неориентированном кристалле, то речь идет о выпадении вклада в сечение только отдельных слагаемых, что не скажется сильно на тройной сумме по  $\mathbf{g}$ . При этом суммирование по  $\mathbf{g}$  может быть заменено интегрированием, в результате чего сечение излучения (27.9) будет совпадать с сечением излучения в аморфной среде.

Иная ситуация будет иметь место в случае, когда движение происходит под малым углом к одной из кристаллографических осей или плоскостей. В этом случае с изменением  $\delta'$  из (27.11) могут выпадать вклады в сечение сразу некоторых наборов слагаемых, что может сильно отразиться на сечении. Кроме того,

Таблица 4.2. Характерные зависимости сечения излучения

Сечение излучения	Условия применимости	Особенности излучения
$N_1^2 \sigma'_0$ $\sim a_1 \delta' N_1 \sigma'_0$	$l \gg N_1 a_1$ $N_1 a_1 \gg l \gg a_1$	когерентность подавление когерентности излучения за счет интерференции
$\sim N_1 \sigma'_0$ $N_1 \sigma'_0$	$N_1 a_1 \gg l \sim a_1$ $a_1 \gg l \gg R$	интерференция излучения, как в аморфной среде
$\sim N_0 N_1 \sigma'_0$	$\mathcal{Q} \sim l \gg N_1 a_1$	когерентность + интерференция

если частица движется под малым углом к кристаллографической оси или плоскости и при этом  $l_c \gg a_i$ , то в пределах длины когерентности будет находиться большое число атомов решетки. Ниже будет показано, что излучение на этих атомах будет происходить когерентно, как на одном центре с эффективным зарядом  $Z_{\text{eff}} \sim (l_c/a)Z|e|$ , в результате чего сечение излучения электрона в кристалле может значительно превысить сечение излучения в аморфной среде. Таким образом, при движении релятивистского электрона в кристалле под малым углом к одной из кристаллографических осей или плоскостей могут проявляться когерентные и интерференционные эффекты в излучении, приводящие к значительному увеличению интенсивности излучения электрона в кристалле по сравнению с интенсивностью излучения в аморфной среде и к значительным скачкам интенсивности излучения при некоторых частотах излученных квантов.

Ясно, что наибольшее число атомов будет находиться в пределах длины когерентности в том случае, если частица будет двигаться вблизи кристаллографической оси, поэтому прежде всего рассмотрим именно этот случай.

Считая угол  $\psi$  между импульсом падающего электрона  $\mathbf{p}$  и кристаллографической осью  $z$  малым, имеем

$$g_{\parallel} = g_z + \psi(g_y \cos \alpha + g_x \sin \alpha), \quad (29.2)$$

где  $\alpha$  — угол между проекцией вектора  $\mathbf{p}$  на плоскость  $(x, y)$  и осью  $y$  (см. рис. 4.1), решетка считается ортогональной, но не обязательно кубической. Основной вклад в  $d\sigma_c$  при  $\psi \ll R/a_1$  вносят слагаемые с  $g_z = 0$ , так что

$$\frac{d\sigma_c}{d\omega} = \frac{2e^2 \delta'}{m^2 \Delta \omega} \frac{E'}{E} \sum_{g_x, g_y} \frac{g_{\perp}^2}{g_{\parallel}^2} \left[ 1 + \frac{\omega^2}{2EE'} - 2 \frac{\delta'}{g_{\parallel}} \left( 1 - \frac{\delta'}{g_{\parallel}} \right) \right] |u_g|^2 e^{-g^2 u^2}, \quad (29.3)$$

причем  $g_{\parallel} = \psi(g_y \cos \alpha + g_x \sin \alpha) \geq \delta'$  и  $g_{\perp}^2 = g_x^2 + g_y^2$ .

Заметим, что в этом случае суммарная потенциальная энергия (27.1), зависящая от трех координат, заменяется функцией  $U(x, y)$  от двух координат,  $x$  и  $y$ , представляющей собой усредненную потенциальную энергию взаимодействия



частицы с кристаллом по координате  $z$ :

$$U(x, y) = L^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dz U(r), \quad (29.4)$$

где  $L$  — толщина кристалла. Эту величину можно рассматривать как потенциальную энергию взаимодействия частицы с совокупностью непрерывных цепочек атомов кристалла, расположенных параллельно оси  $z$  (см. формулу (35.8)). Иными словами, в качестве основного элемента, при взаимодействии с которым происходит излучение, теперь выступает не отдельный атом, а цепочка атомов.

Отметим, что основной вклад в сечение (29.3) вносят значения  $g_{\perp} \sim R^{-1}$ , причем эта оценка остается в силе и при  $u^2 = 0$ .

Если формально считать, что постоянные решетки вдоль осей  $y$  и  $x$  очень велики ( $a_2, a_3 \rightarrow \infty$ ) — это соответствует «раздвижению» цепочек атомов кристалла, расположенных параллельно оси  $z$  на большое расстояние друг от друга, при котором взаимодействие частицы с различными цепочками можно считать независимым, — то в (29.3) суммирование по  $g_x$  и  $g_y$  можно заменить интегрированием, и мы придем к формуле [5, 13]

$$\frac{d\sigma_c}{d\omega} = \frac{e^2 \delta'}{2\pi^2 m^2 a_1 \omega} \frac{E'}{E} \int d^2 g_{\perp} \frac{g_{\perp}^2}{g_{\parallel}^2} \left[ 1 + \frac{\omega^2}{2EE'} - 2 \frac{\delta'}{g_{\parallel}} \left( 1 - \frac{\delta'}{g_{\parallel}} \right) \right] |u_g|^2 e^{-g^2 u^2} \quad (29.5)$$

с ограничением  $g_{\parallel} \geq \delta'$ . Из этой формулы следует, что для экранированного кулоновского потенциала

$$d\sigma_c \approx N_c d\sigma_{\text{вн}}, \quad (29.6)$$

где  $N_c = \begin{cases} kR/a_1 \psi, & 2R\delta'/\psi \ll 1, \\ k/a_1 \delta', & 2R\delta'/\psi \gg 1 \end{cases}$  и  $k = \pi/2 \ln(183 Z^{-1/3})$ .

Мы видим, что при  $l_c \gg a_1$  сечение излучения в кристалле будет значительно больше сечения излучения, определяемого формулой Бете и Гайтлера (12.18). По порядку величины  $N_c$  представляет собой число атомов на длине когерентности.

Наличие в сечении (29.6) множителя  $N_c$  выражает эффект когерентности, возникающий в кристаллической среде. Благодаря этому эффекту сечение излучения (27.9), отнесенное к одному атому  $d\sigma/N_0$ , оказывается в  $N_c \gg 1$  раз больше сечения излучения в разреженном газе атомов или в аморфной среде.

Формулу (29.5) мы получили, предполагая, что взаимодействие электрона с различными цепочками атомов является независимым. Такая ситуация имеет место, если частица движется вдали от кристаллографических плоскостей, плотно

«усеянных» атомами [ $\alpha$  и  $(\pi/2 - \alpha)$  не малы по сравнению с единицей]. Действительно, в этом случае основной вклад в (29.3) вносят значения  $g_{x,y} \sim R^{-1} > 2\pi/a_{2,3}$ . Функция под знаком суммы в этом случае будет плавной функцией переменных  $g_x$  и  $g_y$ . Так как должно выполняться условие

$$g_{\parallel} = \psi(g_y \cos \alpha + g_x \sin \alpha) \geq \delta',$$

то с ростом  $\delta'$  из двойной суммы будет постепенно выпадать по одному слагаемому и это не скажется сильно на двойной сумме по  $g_x$  и  $g_y$ . Поэтому суммирование в (29.3) по  $g_x$  и  $g_y$  может быть заменено интегрированием.

Рассмотрим теперь тот случай когда электрон движется возле кристаллографической плоскости, так что выполняется условие  $\alpha \ll 1$  (кроме того, считается, что и  $\psi \ll R/a_1$ ). При этом с изменением  $\delta'$  для  $\delta' \sim \psi g_y$ , из двойной суммы по  $g_x$  и  $g_y$  будут выпадать наборы слагаемых, благодаря чему сечение излучения будет резко изменяться при значениях  $\delta' = 2\pi n\psi/a_2$  ( $n=1, 2, \dots$ ). В этом случае длина когерентности  $l_c = 1/\delta'$  будет порядка  $a_2/\psi$ . Величина  $a_2/\psi$  представляет собой длину пути, проходимого частицей между двумя последовательными столкновениями с цепочками атомов кристалла, расположенных в пределах кристаллической плоскости (рис. 4.4).

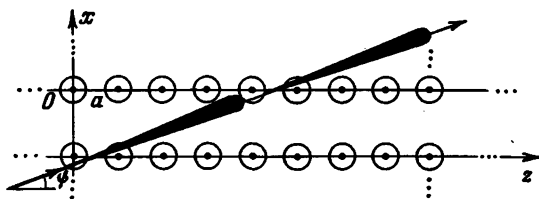


Рис. 4.4. Излучение при движении электрона вдоль кристаллической плоскости под малым углом к кристаллической оси, лежащей в этой плоскости

Резкие максимумы в сечении обуславливаются интерференцией волн, излучаемых электроном при взаимодействии с различными цепочками атомов. При этом на длине когерентности будут находиться  $N_c \sim 2R/\psi a_1$  атомов из отдельной цепочки атомов кристалла, и все эти атомы будут излучать когерентно.

На рис. 4.5 представлена зависимость интенсивности излучения от частоты  $\omega$  для электронов с энергией  $E=1$  ГэВ, движущихся в кристалле кремния вблизи кристаллографической оси  $\langle 100 \rangle$ . По оси ординат отложена величина  $m^2 Z^{-2} e^{-6} \omega (d\sigma_c/d\omega)$ , а по оси абсцисс — частота в МэВ (предполагается, что  $u^2=0$ ). Рис. 4.5, а соответствует случаю, когда электроны движутся вдали от плотно упакованных атомами кристаллических плоскостей и значение угла  $\psi$  соответствует: 1 мрад (кривая 1), 2 мрад (кривая 2) и 4 мрад (кривая 3). Рис. 4.5, б соответствует случаю, когда электроны движутся

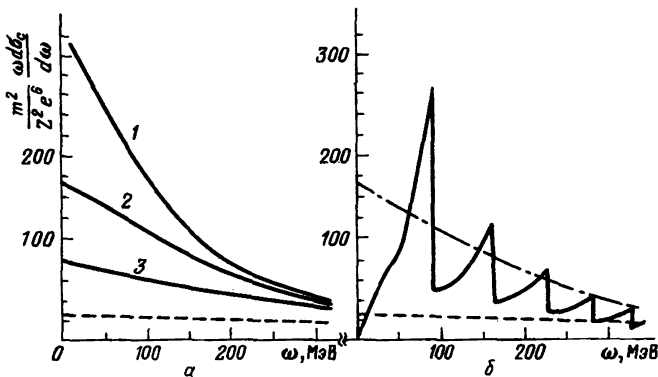


Рис. 4.5. Спектры излучения электронов с энергией 1 ГэВ, движущихся в кристалл кремния под малым углом  $\psi$  к оси  $\langle 100 \rangle$ ;  $a$ —движение вдали от плотно упакованных атомами кристаллических плоскостей;  $b$ —движение вблизи плоскости (110)

вдоль плоскости (110) под углом  $\psi = 2$  мрад к оси  $\langle 100 \rangle$  штрихпунктирная кривая соответствует движению электрона вдали от кристаллических плоскостей. Штриховые кривые соответствуют сечению Бете—Гайтлера (12.18). (В рассматриваемом случае  $a_1 = a$ ,  $a = 5,43 \text{ \AA}$ —постоянная решетки, и цепочки атомов кристалла, вблизи которых движется электрон, образуют в плоскости, ортогональной оси  $\langle 100 \rangle$ , двумерную решетку с  $a_2 = a_3 = a/2\sqrt{2}$ —см. табл. 4.3.)

Мы видим, что в области малых частот  $\sigma'_c \gg \sigma_{\text{вн}}$  и что при движении электрона вдоль кристаллической плоскости сечение излучения обладает резкими максимумами. Плавная штрихпунктирная линия на рис. 4.5,  $b$  соответствует когерентному излучению электрона на каждой цепочке атомов кристалла; кривая с резкими максимумами соответствует случаю, когда имеют место когерентный эффект при излучении электрона на каждой цепочке атомов и интерференционный эффект при излучении на различных цепочках атомов.

Таблица 4.3. Расстояние между плоскостями (в постоянных решетки  $a$ ) для элементов, имеющих кубическую структуру

Тип решетки	Число атомов в ячейке	Оси			Плоскости		
		$\langle 100 \rangle$	$\langle 110 \rangle$	$\langle 111 \rangle$	(100)	(110)	(111)
<i>fcc</i>	4	1	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	1/2	$1/2\sqrt{2}$	$1/\sqrt{3}$
<i>fcc(d)</i>	8	1	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/4$ , $3\sqrt{3}/4$	1/2	$1/2\sqrt{2}$	$1/4\sqrt{3}$ , $\sqrt{3}/4$
<i>bcc</i>	2	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1/4	$1/\sqrt{2}$	$1/2\sqrt{3}$

### § 30. Излучение при движении вблизи кристаллографической плоскости (борновское приближение)

Мы рассмотрели излучение при движении электрона вблизи кристаллической плоскости, предполагая, что  $\delta' \sim \psi/a_2$ . Теперь мы будем предполагать, что по-прежнему частица движется вблизи кристаллической плоскости ( $\alpha \ll 1$ ) и выполняется условие  $\delta' \sim \psi\alpha/a_3$ , а не условие  $\delta' \sim \psi a_2$ .

В этом случае основной вклад в сечение когерентного излучения (27.11) вносят слагаемые с  $g_z = g_y = 0$  и сечение излучения имеет вид

$$\frac{d\sigma_c}{d\omega} = \frac{2e^2\delta'}{m^2\Delta\theta^2\omega} \frac{E'}{E} \sum_{g_x \geq \delta'/\theta} \left[ 1 + \frac{\omega^2}{2EE'} - 2 \frac{\delta'}{\theta g_x} \left( 1 - \frac{\delta'}{\theta g_x} \right) \right] |u_g|^2 e^{-g_x^2 u^2}, \quad (30.1)$$

где  $\theta = \psi\alpha$  — угол между импульсом падающего электрона и кристаллографической плоскостью ( $y, z$ ).

Формула (30.1) показывает, что в рассматриваемом случае суммарная потенциальная энергия (27.1), зависящая от трех координат, может быть заменена функцией  $U(x)$  от одной координаты  $x$ , представляющей собой усредненную потенциальную энергию кристалла по координатам  $y$  и  $z$ :

$$U(x) = (L_y L_z)^{-1} \int dy dz U(\mathbf{r}), \quad (30.2)$$

где  $L_y$  — линейный размер плоскости вдоль оси  $y$ . Величину  $U(x)$  можно рассматривать как потенциальную энергию взаимодействия частицы с совокупностью непрерывных плоскостей атомов кристалла, расположенных параллельно плоскости ( $y, z$ ), — см. формулу (42.1). Иными словами, вся плоскость в целом, вблизи которой движется частица, в рассматриваемом случае выступает в роли элементарного объекта, в результате взаимодействия с которым происходит излучение.

Если считать формально расстояние между плоскостями  $a_3$  очень большим ( $a_3 \rightarrow \infty$ ), то очевидно, что суммирование по  $g_x$  может быть заменено интегрированием по  $(a_3/2\pi) dg_y$ . При этом сечение излучения приобретает вид

$$\frac{d\sigma_c}{d\omega} = \frac{e^2\delta'}{\pi m^2 a_1 a_2 \theta^2 \omega} \frac{E'}{E} \int_{\delta'/\theta}^{\infty} dg_x \left[ 1 + \frac{\omega^2}{2EE'} - 2 \frac{\delta'}{\theta g_x} \left( 1 - \frac{\delta'}{\theta g_x} \right) \right] |u_g|^2 e^{-g_x^2 u^2}. \quad (30.3)$$

В случае экранированного кулоновского потенциала спектральное распределение излучения, даваемое формулой (30.3), представлено на рис. 4.6, *a*. Кривые 1 и 2 соответствуют электронам с энергией  $E = 1$  ГэВ, движущимся соответственно под углами  $\theta = 0,2$  и  $0,4$  мрад к кристаллической плоскости

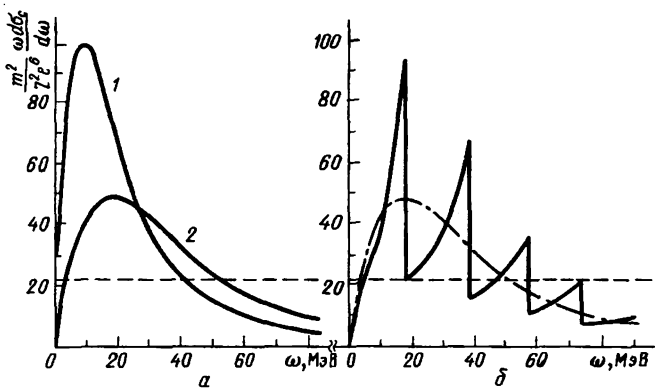


Рис. 4.6. Спектры излучения электронов с энергией 1 ГэВ в поле непрерывного потенциала (110) плоскостей кристалла кремния при падении частиц на кристалл под различными углами к плоскостям: *а* — вычисления по формуле (30.3); *б* — по формуле (30.1)

(110) кристалла кремния ( $a_1 = a_2 = 5,43 \text{ \AA}$ ,  $a_3 = a_2 / \sqrt{2}$ ; тепловое смещение атомов не учитывается). На рис. 4.6, *б* изображена эта же величина, вычисленная по точной формуле (30.1), когда суммирование не заменяется интегрированием ( $\theta = 0,4 \text{ мрад}$ ).

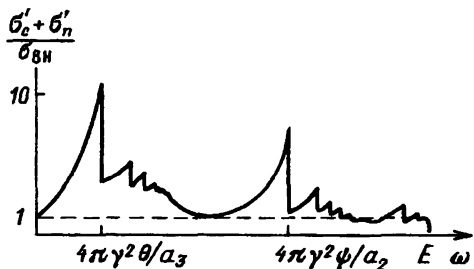


Рис. 4.7. Спектр излучения электрона во всей области частот при движении под малым углом  $\theta$  к кристаллографической плоскости

$\theta = 0,4 \text{ мрад}$ ). Увеличение сечения излучения в области малых частот по сравнению с результатом Бете и Гайтлера (штриховая линия на рис. 4.6) обусловлено эффектом когерентности излучения электрона в кристалле. В рассматриваемом случае электрон излучает когерентно, взаимодействуя с атомами, расположенными в пределах отдельной кристаллической плоскости.

Качественный ход спектрального распределения излучения во всей области частот при  $\psi \ll 1$  и  $\alpha \ll 1$  представлен на рис. 4.7. В области частот  $\omega \sim 4\pi\gamma^2\psi/a_2$  для излучения существенно взаимодействие электрона с отдельными цепочками

Мы видим, что здесь проявляются резкие максимумы, обусловленные интерференцией волн, излученных частицей при взаимодействии с различными плоскостями. В формуле (30.3) эти максимумы заинтегрированы (штрихпунктирная кривая на рис. 4.6, *б* соответствует величине  $\omega d\sigma_e/d\omega$ , найденной по формуле (30.3) при

атомов кристалла, расположенными в плоскости параллельно оси  $z$ ; а в области  $\omega \sim 4\pi\gamma^2\theta/a_3$  — взаимодействие с отдельными плоскостями атомов. Небольшие максимумы в спектре излучения при  $\omega \approx E$  обусловлены интерференцией волн, излучаемых электроном при взаимодействии с отдельными атомами решетки. Положения этих максимумов определяются из условия  $\delta' = 2\pi n/a_1$ , где  $n=1, 2, \dots$  (см. § 28).

### § 31. Высшие борновские приближения в теории излучения

До сих пор мы рассматривали излучение электрона в кристалле в первом борновском приближении квантовой электродинамики. Если бы мы имели дело с одним атомом, то параметром квантовоэлектродинамического разложения в теории излучения была бы величина  $Ze^2/\hbar v$ . Первым борновским приближением в случае излучения электрона в поле одного атома можно пользоваться, если эта величина мала по сравнению с единицей. Это и есть критерий применимости первого борновского приближения. При излучении в поле цепочки атомов, как показано в § 14, вместо параметра  $Ze^2/\hbar v$  выступает параметр  $N_c Ze^2/\hbar v$ , где  $N_c$  — число атомов цепочки на длине когерентности. Если этот параметр не мал, то недостаточно пользоваться первым борновским приближением.

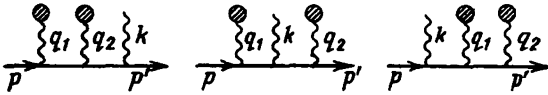


Рис. 4.8. Диаграммы Фейнмана процесса излучения, соответствующие второму борновскому приближению по взаимодействию электрона с внешним полем

Такая ситуация имеет место при излучении быстрых частиц в кристаллах и, следовательно, в этом случае необходим учет следующих приближений. В этом параграфе мы рассмотрим излучение быстрой частицы в кристалле с учетом вклада в излучение второго борновского приближения [11].

На рис. 4.8 изображены диаграммы Фейнмана, соответствующие второму борновскому приближению теории возмущений по взаимодействию электрона с внешним полем (второе борновское приближение). Диаграммы первого порядка представлены на рис. 2.2.

Матричный элемент, описывающий излучение с учетом второго борновского приближения, имеет вид

$$M = M_1 + M_2 + \dots, \quad (31.1)$$

где  $M_1$  определяется формулой (12.3) и  $M_2$  — матричный элемент, соответствующий диаграммам рис. 4.8:

$$M_2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 q_1 \bar{u}' e_\mu Q_{2\mu} u U_{q_1} U_{q_2}. \quad (31.2)$$

Здесь  $u$  и  $\bar{u}'$  — биспиноры начального и конечного электронов,  $e_\mu$  — вектор поляризации излученного фотона,  $U_q$  — фурье-компоненты потенциальной энергии взаимодействия частицы с внешним полем,  $\mathbf{q}_2 = \mathbf{q} - \mathbf{q}_1$ ,

$$Q_{2\mu} = \gamma_\mu \frac{\hat{p}_1 - \hat{q} + m}{f'} \gamma_0 \frac{\hat{p}_1 - \hat{q}_1 + m}{\sigma} \gamma_0 + \gamma_0 \frac{\hat{p}_2 + \hat{q}_2 + m}{\tau} \gamma_\mu \frac{\hat{p}_1 - \hat{q}_1 + m}{\sigma} \gamma_0 + \\ + \gamma_0 \frac{\hat{p}_2 + \hat{q}_2 + m}{\tau} \gamma_0 \frac{\hat{p}_2 + \hat{q} + m}{f} \gamma_\mu, \quad (31.3)$$

$$\sigma = 2\mathbf{p}_1 \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_1^2, \quad \tau = -2\mathbf{p}_2 \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_2^2, \quad \hat{p} = p_\mu \gamma_\mu$$

— произведение четырехмерных векторов  $p_\mu$  и  $\gamma_\mu$ .

Подставляя разложение (31.1) в (12.5), получим сечение излучения с учетом второго борновского приближения:

$$d\sigma = \frac{e^2}{4\omega E E'} \frac{d^3 p' d^3 k}{(2\pi)^4} \delta(E - E' - \omega) (|M_1|^2 + 2 \operatorname{Re} M_1 M_2^* + \dots). \quad (31.4)$$

В общем случае вычисление вклада в сечение (31.4) вносимого вторым борновским приближением, довольно громоздко, поэтому мы ограничимся рассмотрением только простейшего случая, когда движение частицы в кристалле происходит вблизи кристаллографической плоскости, и ее взаимодействие с плоскостью описывается одномерным потенциалом (30.2), причем будем предполагать, что  $a_1 = a_2 = a$  и  $a_3 \rightarrow \infty$ .

Фурье-компонента потенциальной энергии  $U_q$  в этом случае может быть записана в виде

$$U_q = \frac{(2\pi)^2}{a^2} \delta(q_z) \delta(q_y) F(q_x), \quad (31.5)$$

где  $\delta(\mathbf{q})$  — дельта-функция и  $F(q_x)$  — фурье-компонента одномерной потенциальной энергии (30.2). Если потенциал отдельного атома решетки представляет собой экранированный потенциал Кулона (7.5), то

$$F(q_x) = \frac{4\pi Z e |e|}{q_x^2 + R^{-2}}. \quad (31.6)$$

При этом матричный элемент (31.1) приобретает вид

$$M = \frac{4\pi^2}{a^2} \delta(q_z) \delta(q_y) \left\{ \bar{u}' e_\mu Q_{1\mu} u F(q_x) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi} \int dq_{1x} \bar{u}' e_\mu Q_{2\mu} u F(q_{1x}) F(q_{2x}) + \dots \right\}. \quad (31.7)$$

Переходя в сечении (31.4) к переменным переданного импульса  $\mathbf{q}$  (см. § 12) и учитывая, что квадрат дельта-функции

равен

$$[\delta(q_y)\delta(q_z)]^2 = \frac{L_y L_z}{4\pi^2} \delta(q_y)\delta(q_z),$$

где  $L_y$  и  $L_z$  — линейные размеры кристалла вдоль осей  $y$  и  $z$ , получим

$$d\sigma = \frac{L_y L_z}{a^4} \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{E'}{E} \frac{\delta'}{m^2} \frac{d\omega}{\omega} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} dq_x \times \\ \times \left\{ |\bar{u}' e_\mu Q_{1\mu} u|^2 |F(q)|^2 + 2 \operatorname{Re} \bar{u}' e_\mu Q_{1\mu} u \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{2\pi} \int dq_{1x} (\bar{u}' e_\mu Q_{2\mu} u)^* F(q) F(q_1) F(q_2) \right\}. \quad (31.8)$$

При вычислении поправки, связанной со вторым борновским приближением, мы учтем только первое слагаемое разложения этой поправки по обратным степеням энергии частицы, вносящее наибольший вклад в поправку. Выполнив усреднение по поляризациям начальных частиц и просуммировав по поляризациям конечных частиц, получим следующее выражение для сечения излучения, отнесенного к одному атому [11]:

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{4\pi Z^2 e^6}{EE'a^2} \frac{\delta'}{\theta^2} \int_{\delta'/\theta}^{\infty} dq_x (q_x^2 + R^{-2})^{-2} \times \\ \times \left[ 1 + \frac{E'^2}{E^2} - 4 \frac{E'}{E} \frac{\delta'}{\theta q_x} \left( 1 - \frac{\delta'}{\theta q_x} \right) \right] \left( 1 + \frac{e}{|e|} \frac{Ze^2}{Ea\theta^2} \frac{3R}{2a} \frac{R^{-2}}{q_x^2 + 4R^{-2}} \right). \quad (31.9)$$

При выводе этой формулы мы воспользовались соотношением (31.6) для функции  $F(q_{1x})$  и пренебрегли интерференцией волн, излучаемых частицей при взаимодействии с различными плоскостями атомов, расположенными периодически вдоль оси  $x$ . (Учет этой периодичности не представляет труда, для этого необходимо только интеграл по  $q_x$  заменить суммой по векторам обратной решетки — см. § 30.)

Формула (31.9) показывает, что поправка к сечению когерентного излучения быстрой частицы в кристалле (30.3), связанная со вторым борновским приближением, зависит от знака заряда частицы, причем для позитронов эта поправка положительна, а для электронов она отрицательна. Этот результат имеет простой физический смысл. Позитрон, подлетая к плоскости, плотно «усеянной» атомами, отталкивается от этой плоскости. Из-за этого он больше времени проводит вблизи центра плоскости, где потенциал  $U(x)$  имеет максимальный градиент (см. рис. 6.1) и, следовательно, сильнее излучает, чем электрон.

Отметим, что различие излучений электрона и позитрона в кристалле в рассматриваемом случае определяется парамет-



ром  $RZe^2/Ea^2\theta^2$ , а не непосредственно величиной  $N_cZe^2/\hbar v$ . Дело в том, что в § 14 при выводе формулы для сечения излучения в эйкональном приближении были отброшены слагаемые, пропорциональные  $E^{-1}$ , и показано, что в этом случае параметром разложения является величина  $N_cZe^2/\hbar v$ . Теперь же при выводе формулы (31.9) мы сохранили первое слагаемое разложения по обратным степеням энергии, что и привело к параметру  $RZe^2/Ea^2\theta^2$ . Таким образом, мы видим, что в квантовоэлектродинамической теории возмущений, в действительности, играют роль два параметра:  $N_cZe^2/\hbar v$  и  $RZe^2/Ea^2\theta^2$ . При достаточно больших энергиях частицы ( $E \rightarrow \infty$ ) остается только первый параметр.

Параметр, определяющий различие в излучении электронов и позитронов в поле (30.2), может быть записан в виде

$$\frac{RZe^2}{Ea^2\theta^2} \sim \frac{\theta_c^2}{\theta^2}, \quad (31.10)$$

где  $\theta_c = \sqrt{4RZe^2/Ea^2}$  — критический угол плоскостного каналирования [18, 19]. Угол  $\theta_c$  определяет по порядку величины значение угла  $\theta$  падения частицы на кристалл по отношению к кристаллографической плоскости, при котором возможно явление каналирования (см. гл. 6). Поправка к сечению излучения, связанная со вторым борновским приближением, должна быть мала по сравнению с вкладом в излучение, вносимым первым борновским приближением, поэтому формула (31.9) справедлива, если

$$\theta \gg \theta_c. \quad (31.11)$$

Таким образом, формулы первого борновского приближения справедливы, если движение частицы в кристалле происходит под большими углами к кристаллографическим плоскостям по сравнению с углами, при которых возможно явление каналирования частиц.

Сравнивая поправку к сечению когерентного излучения частицы в кристалле с соответствующей поправкой к сечению излучения на изолированном атоме [12]

$$d\sigma = d\sigma_{\text{ВН}} \left( 1 + \frac{e}{|e|} \frac{Ze^2 m}{\hbar v E} + \dots \right), \quad (31.12)$$

видим, что в поле отдельного атома при больших  $E$  эта поправка всегда мала, тогда как в кристалле при малых  $\theta$  она может давать заметный вклад в излучение. А при  $\theta \sim \theta_c$  борновское приближение вовсе теряет смысл и анализ процесса излучения должен проводиться с учетом всех борновских приближений.

При  $E \rightarrow \infty$  согласно (31.9) поправка к сечению когерентного излучения исчезает. Исчезнет при этом и различие между излучением электронов и позитронов.

## § 32. Классическая теория когерентного излучения

Мы рассматривали излучение электрона в кристалле в первом и во втором борновских приближениях. Этими приближениями можно было пользоваться, если  $\psi \gg \psi_c$  и  $N_c Z e^2 / \hbar v \ll 1$ . Если выполняется неравенство  $N_c Z e^2 / \hbar v \gg 1$  противоположное условию применимости борновского приближения, и, кроме того, имеет место неравенство  $\hbar \omega \ll E$ , то излучение можно трактовать классически. Излучение в этом случае определяется траекторией частицы в веществе, которая находится из уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \frac{mv}{\sqrt{1-v^2}} = -\nabla \sum_n u(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n). \quad (32.1)$$

Покажем, что в случае, когда потенциальная энергия взаимодействия частицы с полем решетки может рассматриваться как малое возмущение, спектральная плотность излучения, даваемая классической теорией, будет совпадать со спектральной плотностью излучения, вычисленной в квантовой электродинамике в первом борновском приближении, если пренебречь отдачей при излучении [13, 20]. Малость потенциальной энергии означает, что траектория частицы близка к прямолинейной и угол ее рассеяния мал.

Решение уравнения движения (32.1) будем искать в виде ряда по степеням потенциала:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &\approx \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1(t) + \mathbf{v}_2(t) + \dots, \\ \mathbf{r}(t) &\approx \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \int_0^t dt' \mathbf{v}_1(t') + \dots, \end{aligned} \quad (32.2)$$

где  $\mathbf{r}_0$  — точка влета частицы в среду и  $\mathbf{v}_0$  — начальная скорость. Первые члены этого разложения для релятивистской частицы имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1(t) &= -\frac{1}{E} \int_{-\infty}^t dt' \frac{\partial}{\partial \rho} \sum_n u(\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t' - \mathbf{r}_n), \\ \mathbf{v}_2(t) &= -\frac{1}{2} \mathbf{v}_0 (\mathbf{v}_1(t))^2 + \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \left( \mathbf{v}_1(t'') \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \dot{\mathbf{v}}_1(t'), \end{aligned} \quad (32.3)$$

где  $\rho$  — компоненты вектора  $\mathbf{r}_0$  в плоскости, ортогональной  $\mathbf{v}_0$ .

Подставляя разложения (32.2) в формулу (3.2), определяющую спектральную плотность излучения заряженной частицы в классической электродинамике, получим в первом приближе-

нии по потенциалу

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{e^2\omega}{2\pi} \int_{\delta}^{\infty} \frac{dq}{q^2} \left[ 1 - 2 \frac{\delta}{q} \left( 1 - \frac{\delta}{q} \right) \right] \left| \int dt \dot{v}_1(t) e^{iqt} \right|^2. \quad (32.4)$$

При выводе этой формулы также использовано соотношение  $\omega = |\mathbf{k}|$ , что оправдано, если можно пренебречь влиянием поляризации среды на излучение (см. § 3).

Формула (32.4) должна быть усреднена по точкам влета  $\mathbf{r}_0$  частиц в кристалл. Воспользовавшись с этой целью фурье-разложением потенциальной энергии

$$u(r) = (2\pi)^{-3} \int d^3q u_q \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}),$$

находим, что

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \frac{1}{S4\pi^3 m^2} \int d^3q \frac{q_{\perp}^2}{q_{\parallel}^2} \left[ 1 - 2 \frac{\delta}{q_{\parallel}} \left( 1 - \frac{\delta}{q_{\parallel}} \right) \right] |u_q|^2 \left| \sum_n e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_n} \right|^2, \quad (32.5)$$

где  $q_{\parallel}$  и  $q_{\perp}$  — компоненты вектора  $\mathbf{q}$ , параллельная и ортогональные вектору  $\mathbf{v}_0$ , причем  $q_{\parallel} \geq \delta$ . При выводе (32.5) предпологалось, что распределение частиц по  $\mathbf{r}_0$  является равномерным. Выполнив в (32.5) еще усреднение по тепловым колебаниям атомов в решетке и заметив, что спектральная плотность излучения  $\langle d\mathcal{E}/d\omega \rangle$  связана с дифференциальным сечением излучения частицы в кристалле  $d\sigma/d\omega$  соотношением

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = Ln N_0^{-1} \omega \frac{d\sigma}{d\omega}, \quad Ln S = N_0,$$

получим формулу (27.9), если в последней пренебречь отдачей при излучении. (Отметим, что некогерентная часть сечения излучения при этом воспроизводится с логарифмической точностью.) Таким образом, мы пришли к формуле, справедливой в борновском приближении, но приведенный вывод не требует условия применимости борновского приближения. Необходимо лишь, чтобы угол рассеяния частицы в пределах длины когерентности был достаточно мал.

Аналогичный результат нетрудно получить и в случае, когда  $\hbar\omega \sim E$ . Действительно, при выполнении условия  $N_c Z e^2 / \hbar v \gg 1$  вероятность излучения ультрарелятивистского электрона с учетом эффекта отдачи при излучении определяется формулой (17.2). Подставив в эту формулу разложение (32.2) для траектории частицы во внешнем поле, находим с учетом соотношения (12.4), что в первом приближении по потенциалу вероятность излучения (17.2) будет совпадать с формулой (27.6) борновской теории тормозного излучения, справедливой при малых значениях переданного импульса ( $q_{\perp} \ll m$ ). Послед-

няя же формула, фактически, является исходной в теории когерентного излучения быстрых электронов в кристалле.

Мы видим, что формула (27.9) для сечения излучения, полученная в борновском приближении, имеет в действительности область применимости гораздо большую, чем область применимости самого борновского приближения. Таким образом, когерентные и интерференционные эффекты проявляются как при квантовом, так и при классическом рассмотрении процесса излучения релятивистского электрона в кристалле.

Интересно отметить, что почти все эксперименты по проверке предсказаний борновской теории когерентного излучения были выполнены в условиях, когда борновское приближение несправедливо. Вместе с тем, было обнаружено хорошее согласие между результатами экспериментов и результатами первого борновского приближения (см. обзоры [6—8] и ссылки в них). Полученные выше результаты показывают, что причина такого согласия заключается в совпадении формул квантовой и классической теорий излучения быстрых частиц в кристаллах в том случае, когда кристаллическое поле слабо возмущает движение частицы.

При выводе формулы (32.4) мы сохранили только первый член разложения спектральной плотности излучения по потенциалу. В случае движения электрона вблизи одной из кристаллографических плоскостей в поле вида (30.2) нетрудно учесть вклад в излучение и следующего члена разложения спектральной плотности излучения по потенциалу. Полученная при этом формула для спектра излучения совпадает с соответствующим результатом борновской теории когерентного излучения (31.9), если в последней пренебречь отдачей при излучении. Такое совпадение формул квантовой и классической теорий излучения (как главных членов, так и первых поправок к ним) обусловлено тем, что если в (31.9) перейти от сечения к спектральной плотности излучения (напомним, что  $\langle \mathcal{E}' \rangle = LnN_0^{-1} \hbar \omega \sigma'$ ), то конечный результат при  $\hbar \omega \ll E$  оказывается не зависящим от постоянной Планка  $\hbar$ .

### § 33. Условия применимости результатов теории когерентного излучения

Рассмотрим теперь условия применимости результатов изложенной выше теории когерентного излучения релятивистских частиц в кристаллах.

Результаты борновской теории когерентного излучения быстрых частиц в кристаллах, как отмечалось выше, справедливы в значительно большей области, чем область применимости самого борновского приближения. Связано это с тем, что формулы для спектральной плотности излучения, полученные в рамках квантовой и классической теорий излучения

в первом приближении по потенциалу, полностью совпадают. Но такое совпадение формул имеет место далеко не всегда. Для этого требуется, прежде всего, чтобы траекторию частицы в кристалле и спектральную плотность излучения можно было искать в виде ряда по степеням потенциала. Таким образом, формула (32.5) справедлива, если выполняются условия

$$|kv_1(\Delta\tau)|\Delta\tau \ll 1, \quad |kv_1(\Delta\tau)| \ll \omega - kv_0, \quad |v_2| \ll |v_1|, \quad (33.1)$$

где  $\Delta\tau \sim \delta^{-1}/v$  — интервал времени, на котором формируется излучение,  $v_1(\Delta\tau)$  и  $v_2(\Delta\tau)$  — значения  $v_1(t)$  и  $v_2(t)$  на этом интервале времени. Так как характерные значения углов излучения релятивистской частицы по порядку величины равны  $\gamma^{-1}$ , то первые два неравенства (33.1) могут быть записаны в виде

$$|v_1(l_c)| \ll \gamma^{-1}, \quad (33.2)$$

т. е. требуется, чтобы угол рассеяния частицы на длине когерентности излучения  $l_c$  был мал по сравнению с характерным углом ее излучения. Это неравенство представляет собой условие дипольности излучения релятивистской частицы в кристалле (см. § 5).

Последнее из неравенств (33.1) требует, чтобы кристаллическое поле мало возмущало движение частицы в пределах длины когерентности, т. е. требуется, чтобы траектория в пределах длины когерентности была близка к прямолинейной. Учитывая формулы (32.3), можно дать следующую оценку для  $v_2(l_c)$ :

$$v_2(l_c) \sim l_c v_1(l_c) \rho^{-1}.$$

При этом последнее из неравенств (33.1) приобретает вид

$$l_c v_1(l_c) \ll \rho. \quad (33.3)$$

Соотношения (33.2) и (33.3) показывают, что условия применимости формулы (32.5) существенно зависят от энергии частицы, частоты излученного фотона и ориентации кристаллографических осей относительно падающего пучка. Рассмотрим более подробно эти условия в области характерных частот излучения (частот, при которых спектральная плотность излучения максимальна) при движении частиц в кристалле вблизи одной из кристаллографических осей и плоскостей.

При движении электрона в кристалле под малым углом  $\psi$  к одной из кристаллографических осей характерные частоты излучения по порядку величины равны  $\omega \sim \gamma^2 \psi / R$  (см. формулу (29.6)). В этой области частот, согласно (32.3),

$$v_1(l_c) \sim Ze^2 / E\psi a$$

и, следовательно, в рассматриваемом случае неравенства (33.2)

и (33.3) приобретают вид

$$\frac{Ze^2}{ma\psi} \ll 1, \quad \frac{Ze^2}{Ea\psi^2} \ll 1. \quad (33.4)$$

Если частица движется вблизи одной из кристаллографических плоскостей, то согласно (30.1) характерные частоты излучения по порядку величины равны  $\omega \sim \gamma^2 \theta / R$ . Угол рассеяния на длине когерентности в этом случае по порядку величины равен

$$v_1(l_c) \sim RZe^2 / Ea^2 \theta.$$

Используя это соотношение, неравенства (33.2) и (33.3) можно записать в виде

$$\frac{RZe^2}{ma^2 \theta} \ll 1 \quad \text{и} \quad \frac{RZe^2}{Ea^2 \theta^2} \ll 1. \quad (33.5)$$

Первые из неравенств (33.4) и (33.5) представляют собой условия дипольности излучения частицы в кристалле. Вторые из этих неравенств требуют, чтобы движение частицы в кристалле происходило под углами к кристаллографическим осям и плоскостям, значительно превосходящими критические углы осевого  $\psi_c = \sqrt{4Ze^2/Ea}$  и плоскостного  $\theta_c = \sqrt{4RZe^2/Ea^2}$  каналирования.

Таким образом, формулы борновской теории когерентного излучения релятивистскими частицами в кристалле справедливы, если отсутствуют явления каналирования и надбарьерного движения частиц и если угол рассеяния на длине когерентности мал по сравнению с характерным углом излучения релятивистской частицы. Кроме того, требуется, чтобы частота излученного фотона была не очень мала, так чтобы можно было пренебречь влиянием на излучение поляризации среды и многократного рассеяния частицы на неоднородностях потенциала решетки. Необходимо также, чтобы толщина кристалла была не очень велика, так чтобы при прохождении частиц через кристалл не успел развиться электромагнитный ливень и чтобы имело место равномерное распределение частиц пучка по прицельным параметрам.

При нарушении каждого из указанных условий возникают новые эффекты в излучении.

### § 34. Когерентное образование в кристалле электронно-позитронных пар фотоном

Когерентные и интерференционные эффекты проявляются не только при излучении, но и при образовании электронно-позитронной пары фотоном в кристалле. Связано это с тем, что при высоких энергиях процесс образования пары разыгрывается в большой области вдоль импульса фотона, которая

может превысить расстояние между атомами в решетке. Существенным различием между процессами излучения и образования пары в кристалле является то, что периодичность решетки начинает оказывать влияние на сечение образования пары при существенно бóльших энергиях частиц, чем на сечение излучения. Причина этого в том, что максимальное значение длины когерентности процесса образования электронно-позитронной пары  $l_{\pm} = 2E_+ E_- / m^2 \omega$  достигается при значениях энергии позитрона и электрона, равных половине энергии фотона  $E_+ = E_- = \omega/2$ , и, следовательно, длина  $l_{\pm}$  может стать сравнимой с постоянной решетки  $a$  только начиная со значений энергий фотонов, по порядку величины равных

$$\omega \gtrsim 2m^2 a. \quad (34.1)$$

В случае же излучения длина когерентности  $l_c = 2E(E - \omega) / m^2 \omega$  содержит множитель  $E/\omega$ , который при малых частотах  $\omega \ll E$  значительно увеличивает длину когерентности по сравнению с длиной  $l_{\pm}$  и, следовательно, в процессе излучения условие  $l_c \gg a$  может выполняться при энергиях частиц  $E$  меньших, чем в процессе образования пары.

Формулы, описывающие процесс образования электронно-позитронной пары фотоном в кристалле, могут быть получены так же, как это было сделано в предыдущих параграфах при изучении процесса излучения в борновском приближении квантовой электродинамики. Общее выражение для сечения образования пары в кристалле при этом может быть записано в виде

$$d\sigma_{\pm} = N_0 (d\sigma_n^{\pm} + d\sigma_c^{\pm}), \quad (34.2)$$

где  $d\sigma_n^{\pm}$  и  $d\sigma_c^{\pm}$  — сечения процессов некогерентного и когерентного образования электронно-позитронной пары в кристалле, отнесенные к одному атому решетки,

$$d\sigma_n^{\pm} = d\sigma_{\text{ВН}}^{\pm} - d\sigma_1^{\pm}, \quad (34.3)$$

$$d\sigma_c^{\pm} = dE_+ \frac{e^2}{\omega^2 \Delta} \sum_g \frac{g_{\perp}^2}{g_{\parallel}} \left[ \frac{\omega^2}{2E_- E_+} - 1 + 2 \frac{\delta_{\pm}}{g_{\parallel}} \left( 1 - \frac{\delta_{\pm}}{g_{\parallel}} \right) \right] |u_g|^2 e^{-g^2 u^2}. \quad (34.4)$$

Здесь  $d\sigma_{\text{ВН}}^{\pm}$  — сечение образования пары на изолированном атоме (12.21),

$$d\sigma_1 = \frac{e^2}{8\pi^3} \frac{dE_+}{\omega^2} \int d^3 q \frac{q_{\perp}^2}{q_{\parallel}^2} \left[ \frac{\omega^2}{2E_- E_+} - 1 + 2 \frac{\delta_{\pm}}{q_{\parallel}} \left( 1 - \frac{\delta_{\pm}}{q_{\parallel}} \right) \right] |u_q|^2 e^{-q^2 u^2}, \quad (34.5)$$

$g_{\parallel}$  и  $g_{\perp}$  — компоненты переданного импульса  $\mathbf{g} = \mathbf{k} - \mathbf{p}_+ - \mathbf{p}_-$ , параллельная и ортогональные импульсу падающего фотона

и  $\delta_{\pm} = m^2 \omega / 2E_- E_+$ . Суммирование в (34.4) распространяется на значения  $g_{\parallel} \geq \delta_{\pm}$ .

Структура формулы (34.2) для сечения образования пары та же, что и структура соответствующей формулы для сечения излучения электрона в кристалле (27.9), поэтому результаты, которые мы получили при анализе формулы (27.9), должны содержаться и в формуле (34.2). Так, в случае экранированного потенциала Кулона (7.5) поправка к сечению некогерентного излучения, обусловленная сечением  $d\sigma_{\perp}^{\pm}$ , равна

$$d\sigma_{\perp}^{\pm} = \frac{16e^6 Z^2}{3m^2} \frac{dE_+}{\omega^3} \left( E_+^2 - \omega E_+ + \frac{3}{4} \omega^2 \right) B, \quad (34.6)$$

где  $B$  определяется соотношением (27.14), и, следовательно, сечение  $d\sigma_{\perp}^{\pm}$  незначительно (в пределах  $5 \div 25\%$ ) отличается от сечения образования пары на изолированном атоме  $d\sigma_{\text{ВН}}^{\pm}$ .

Сечение когерентного образования электронно-позитронной пары  $d\sigma_c^{\pm}$  существенно отличается от сечений  $d\sigma_{\perp}^{\pm}$  и  $d\sigma_{\text{ВН}}^{\pm}$  в случае, когда фотон падает на кристалл под малым углом к одной из его осей или плоскостей и, кроме того, если в пределах длины когерентности  $l_{\pm}$  находится большое число атомов решетки, т. е. если выполняется условие  $l_{\pm} \gg a$ . В этом случае в соответствии с формулой (29.3)

$$\frac{d\sigma_c^{\pm}}{dE_+} = \frac{e^2}{\omega^2 \Delta} \sum_{g_x, g_y} \frac{g_{\perp}^2}{g_{\parallel}^2} \left[ \frac{\omega^2}{2E_- E_+} - 1 + 2 \frac{\delta_{\pm}}{g_{\parallel}} \left( 1 - \frac{\delta_{\pm}}{g_{\parallel}} \right) \right] |u_{\mathbf{g}}|^2 e^{-g^2 u^2}, \quad (34.7)$$

где

$$g_{\parallel} = \psi (g \cos \alpha + g_x \sin \alpha) \geq \delta_{\pm}, \\ g_{\perp}^2 = g_x^2 + g_y^2,$$

$\psi$  — угол между импульсом фотона  $\mathbf{k}$  и кристаллографической осью  $z$  ( $\psi \ll R/a_1$ ) и  $\alpha$  — угол между проекцией вектора  $\mathbf{k}$  на плоскость  $(x, y)$  и осью  $y$ .

Если же взаимодействие фотона с различными цепочками атомов является независимым (цепочки параллельны оси  $z$ ), то суммирование по  $g_x$  и  $g_y$  в (34.7) можно заменить на соответствующие интегралы. При этом сечение (34.7) приобретает вид

$$\frac{d\sigma_c^{\pm}}{dE_+} = \frac{e^2}{4\pi^2 \omega^2 a_1} \int d^2 g_{\perp} \frac{g_{\perp}^2}{g_{\parallel}^2} \times \\ \times \left[ \frac{\omega^2}{2E_- E_+} - 1 + 2 \frac{\delta_{\pm}}{g_{\parallel}} \left( 1 - \frac{\delta_{\pm}}{g_{\parallel}} \right) \right] |u_{\mathbf{g}}|^2 e^{-g^2 u^2}, \quad (34.8)$$

причем  $g_{\parallel} \geq \delta_{\pm}$ .

Рассмотрим, наконец, случай, когда фотон падает на кристалл под малым углом к одной из кристаллических плоскостей ( $\alpha \ll 1$ ) и выполняется условие  $\delta_{\pm} \sim \psi \alpha / a_3$  (пред-



полагается также, что мал и угол  $\psi$  между импульсом фотона и осью  $z$ ). Тогда основной вклад в сечение (34.7) вносят слагаемые с  $g_y=0$  и это сечение может быть представлено в виде

$$\frac{d\sigma_c^\pm}{dE_+} = \frac{e^2}{\omega^2 \Delta \theta^2} \sum_{g_x \geq \delta_\pm / \theta} \left[ \frac{\omega^2}{2E_- E_+} - 1 + 2 \frac{\delta_\pm}{\theta g_x} \left( 1 - \frac{\delta_\pm}{\theta g_x} \right) \right] |u_g|^2 e^{-g_x^2 u^2}, \quad (34.9)$$

где  $\theta = \psi \alpha$ .

Формулы (34.7) — (34.9) показывают, что при малых значениях углов  $\psi$  и  $\alpha$  в качестве основного элемента, при взаимодействии с которым происходит образование фотоном электронно-позитронной пары, выступает не отдельный атом, а цепочка атомов или вся плоскость атомов, вблизи которой происходит движение. Это в свою очередь приводит к когерентным и интерференционным эффектам, проявляющимся при образовании пары.

Для иллюстрации полученных результатов на рис. 4.9 представлена зависимость сечения когерентного образования пары от энергии позитрона  $E_+$  для фотонов с энергией  $\omega = 100$  ГэВ,

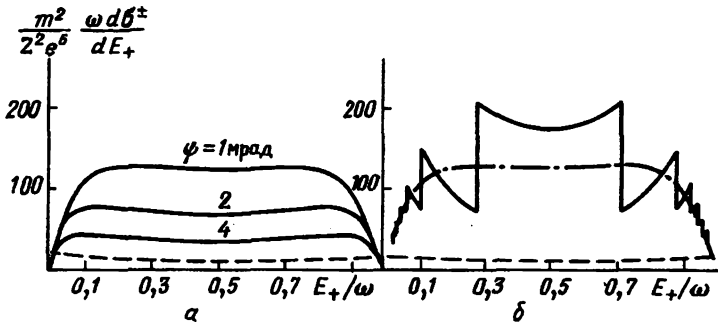


Рис. 4.9. Сечение когерентного образования электронно-позитронной пары фотоном с энергией  $\omega = 100$  ГэВ, падающим на кристалл кремния под малым углом  $\psi$  к оси  $\langle 100 \rangle$ :  $a$  — вычисления по формуле (34.8);  $b$  — по формуле (34.7) при падении фотона вдоль плоскости (110)

падающих на кристалл кремния под малым углом к оси  $\langle 100 \rangle$ . Значение  $u^2$  в вычислениях положено равным нулю. Графики рис. 4.9,  $a$  соответствуют результатам вычислений сечения образования пары по формуле (34.8) при значениях угла  $\psi$ , равных 1; 2 и 4 мрад. График рис. 4.9,  $b$  соответствует случаю, когда фотон падает вдоль плоскости (110) под углом  $\psi = 2$  мрад к оси  $\langle 100 \rangle$ . Штриховая линия на этом рисунке соответствует сечению образования пары фотоном на изолированном атоме (12.21), штрихпунктирная — формуле (34.8).

Приведенные графики непосредственно показывают, что сечение когерентного образования пары фотоном в кристалле существенно отличается от сечения образования пары на изолированном атоме. Плавные кривые на рис. 4.9, *a* соответствуют когерентному образованию пары фотоном при взаимодействии с каждой цепочкой атомов; кривая с резкими максимумами на рис. 4.9, *b* соответствует случаю, когда имеет место когерентный эффект при образовании пары на каждой цепочке атомов и интерференционный эффект при образовании пары на различных цепочках атомов, расположенных в плоскости, вблизи которой происходит падение фотона.

Аналогичные эффекты имеют место и в случае, когда сечение образования пары определяется формулой (34.9), с той лишь разницей, что сечение (34.9) дает заметный вклад в процесс образования пары в кристалле при существенно больших значениях энергий фотонов, чем сечения, определяемые формулами (34.7) и (34.8).

Условия применимости приведенных выше формул те же, что и условия применимости соответствующих формул теории когерентного излучения быстрых частиц в кристалле (см. § 33). В частности, несмотря на то, что формула (34.7) получена на основе первого борновского приближения квантовой теории возмущений, она справедлива в существенно большей области, чем область применимости самого борновского приближения. Связано это с тем, что основной вклад в (34.7) дают значения переданных импульсов  $g \sim R^{-1} \ll m$ . Но в этой области переданных импульсов сечения образования пары, полученные в первом борновском приближении, в приближении эйконала и в квазиклассическом приближении совпадают.

## РЕГУЛЯРНОЕ И ХАОТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ БЫСТРЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

### § 35. Приближение непрерывных цепочек

При движении в веществе быстрая заряженная частица последовательно взаимодействует со многими атомами среды. При этом взаимное расположение атомов относительно импульса падающей частицы может оказать существенное влияние на характер ее движения.

В аморфной среде столкновения с различными атомами являются случайными, поэтому ориентационные эффекты в рассеянии в этом случае отсутствуют.

В кристаллической среде существуют выделенные направления (плотно упакованные атомами кристаллографические оси или плоскости), при движении вблизи которых существенны корреляции между соударениями быстрой частицы с атомами решетки. В результате этих корреляций движение частицы в кристалле будет существенно отличаться от движения в аморфной среде.

Если частица движется в кристалле под малым углом к одной из кристаллографических осей или плоскостей, то будет большой эффективная константа ее взаимодействия с атомами решетки. Движение в этом случае может быть рассмотрено в рамках классической механики.

В классической механике траектория частицы во внешнем электрическом поле определяется уравнением

$$\frac{d}{dt} \frac{mv(t)}{\sqrt{1-v^2(t)}} = -\nabla U(\mathbf{r}), \quad (35.1)$$

где  $\mathbf{v}(t)$  — скорость частицы и  $m$  — ее масса. В случае движения в кристалле величина  $U(\mathbf{r})$  представляет собой сумму потенциальных энергий взаимодействия частицы со всеми атомами решетки:

$$U(\mathbf{r}) = \sum_n u(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n), \quad (35.2)$$

где  $\mathbf{r}_n$  — положение атома в решетке.

При движении в кристалле под малым углом  $\psi$  к одной из кристаллографических осей (оси  $z$ ), как отмечалось выше, существенны корреляции между последовательными соударениями частицы с атомами решетки. Корреляции проявляются

в том, что изменение прицельного параметра между последовательными соударениями частицы с атомами малó по сравнению с прицельным параметром, так что движение частицы в кристалле будет определяться, в основном, средним непрерывным потенциалом цепочек атомов кристалла — потенциалом решетки, усредненным по координате  $z$ ;

$$U(\rho) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{+\infty} dz U(\mathbf{r}), \quad (35.3)$$

здесь  $L$  — толщина кристалла.

Действительно, угол рассеяния релятивистской частицы на отдельном атоме решетки мал,

$$\vartheta_1 \sim \frac{2Ze^2}{Evp},$$

где  $\rho$  — прицельный параметр, поэтому если частица падает на кристалл под малым углом  $\psi$  к оси  $z$ , то изменение прицельного параметра  $\Delta\rho$  на соседних атомах решетки (рис. 5.1) будет по порядку величины равно

$$\Delta\rho \sim a_1 \max(\psi, \vartheta_1),$$

$a_1$  — расстояние между атомами вдоль оси  $z$ . Ясно, что при достаточно больших  $E$  и малых  $\psi$  всегда может быть выполнено неравенство

$$\Delta\rho \ll \rho, \quad (35.4)$$

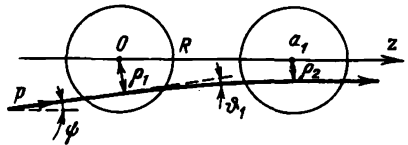


Рис. 5.1. Столкновения заряженной частицы с соседними атомами решетки

при котором траектория частицы будет плавно изменяться с глубиной проникновения в кристалл (по существу, требуется выполнение условия (35.4) в области  $\rho \sim R$ , где  $R$  — радиус экранирования атома, дающей основной вклад в рассеяние). В этих условиях для описания движения частицы в кристалле несущественны неоднородности потенциала вдоль оси  $z$  при переходе от одного атома к другому. При этом потенциальная энергия движущейся в кристалле частицы (35.2) может быть записана в виде

$$U(\mathbf{r}) = U(\rho) + \delta U. \quad (35.5)$$

Здесь  $\delta U$  — отклонение потенциала решетки от среднего значения  $U(\rho)$ , причем величина  $\delta U$  может рассматриваться как малое возмущение.

Приближение непрерывных цепочек было введено Линдхардом [1] при рассмотрении движения в кристалле нерелятивистских каналированных положительно заряженных частиц.

В релятивистском случае этим приближением можно пользоваться как для каналированных, так и для неканалированных частиц. Необходимо лишь, чтобы угол  $\psi$  был достаточно мал, а энергия частицы  $E$  была достаточно велика (см. § 29 и § 30).

В настоящей главе мы будем интересоваться особенностями движения быстрой заряженной частицы в кристалле в поле непрерывного потенциала цепочек атомов (35.3). При этом мы будем исходить в основном из классической картины движения. Вопрос о влиянии на движение неоднородности потенциала решетки будет рассмотрен в гл. 8.

В приближении непрерывной цепочки уравнение (35.1) приобретает вид

$$\frac{d}{dt} \frac{mv(t)}{\sqrt{1-v^2(t)}} = -\nabla U(\rho). \quad (35.6)$$

Из этого уравнения вытекает, что в поле непрерывного потенциала кристалла сохраняется составляющая импульса частицы  $p_{\parallel}$ , параллельная оси  $z$ . При этом в плоскости  $(x, y)$ , ортогональной оси  $z$ , траектория будет определяться уравнением

$$\ddot{\rho} = -\frac{1}{E_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial \rho} U(\rho), \quad (35.7)$$

где  $E_{\parallel} = \sqrt{p_{\parallel}^2 + m^2}$ ,  $E_{\parallel} \approx E$  и  $\rho = (x, y)$ .

Потенциал  $U(\rho)$ , в котором происходит движение, является периодической функцией координат  $x$  и  $y$ . Модуль этого потенциала максимален при значениях координат  $\rho_n = (x_n, y_n)$ , характеризующих положения цепочек атомов в плоскости  $(x, y)$ , причем с увеличением расстояния от цепочки величина  $|U(\rho)|$  быстро убывает. Поэтому потенциальная энергия  $U(\rho)$  может быть представлена в виде суммы потенциальных энергий взаимодействия частицы с отдельными цепочками атомов кристалла, расположенными параллельно оси  $z$ :

$$U(\rho) = \sum_n U_r(\rho - \rho_n), \quad U_r(\rho) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \sum_k u(\rho + \mathbf{u}_k, z), \quad (35.8)$$

где суммирование по  $k$  в формуле для  $U_r(\rho)$  происходит по положениям атомов в отдельной цепочке атомов и  $\mathbf{u}_k$  — тепловой разброс положений этих атомов относительно оси цепочки. Предполагая, что распределение положений атомов по  $\mathbf{u}_k$  имеет гауссов вид со средним квадратом смещения атома вдоль одной из осей, равным  $\overline{u^2}$ , находим

$$U_r(\rho) = \frac{1}{a_1 \overline{u^2}} \int d^2 u e^{-u^2/2\overline{u^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz u(\rho + \mathbf{u}, z). \quad (35.9)$$

В случае, когда потенциал атома представляет собой экранированный потенциал Кулона (7.5), как легко проверить, при  $u^2=0$

$$U_r(\rho) = \frac{2Ze^2}{a_1} K_0\left(\frac{\rho}{R}\right), \quad (35.10)$$

где  $K_0(x)$  — модифицированная функция Ханкеля.

Первый интеграл движения уравнения (35.7) имеет вид

$$\varepsilon_{\perp}(\rho_0) = \varepsilon_{\perp} + U(\rho_0) = \frac{1}{2} E \dot{\rho}^2 + U(\rho), \quad (35.11)$$

где  $\varepsilon_{\perp} = E\psi^2/2$  — энергия поперечного движения и  $\rho_0$  — координаты точки влета частицы в кристалл.

Таким образом, траектория частицы в кристалле в плоскости  $(x, y)$  определяется поперечной энергией  $\varepsilon_{\perp}$  и непрерывной потенциальной энергией  $U(\rho)$ . Величина  $U(\rho)$ , в свою очередь, определяется потенциальной энергией взаимодействия частицы с отдельным атомом кристалла, температурой решетки и индексом кристаллографической оси, вблизи которой происходит движение.

Рассмотрим в качестве примера движение релятивистских позитронов и электронов в кристалле кремния в плоскости  $(x, y)$ , ортогональной оси  $\langle 111 \rangle$ . На рис. 5.2 представлены

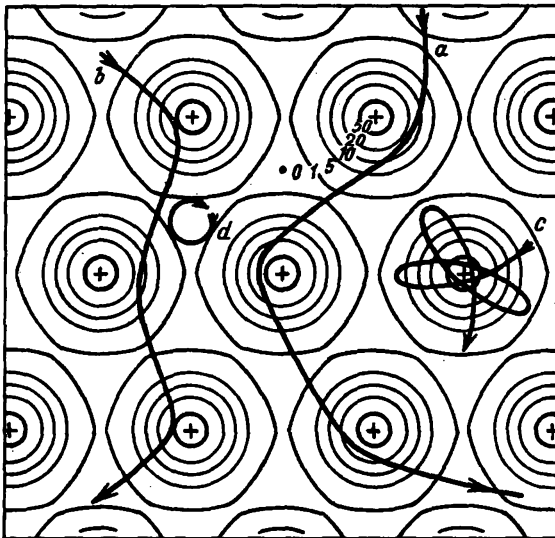


Рис. 5.2. Эквипотенциальные поверхности непрерывной потенциальной энергии взаимодействия позитрона с цепочками атомов кристалла кремния в плоскости, ортогональной оси  $\langle 111 \rangle$ , и типичные траектории каналированных и надбарьерных электронов ( $c, a$ ) и позитронов ( $d, b$ ) в этой плоскости

эквипотенциальные поверхности непрерывной потенциальной энергии  $U(\rho) = \text{const}$  взаимодействия позитрона с полем решетки для этого случая. Вычисления выполнены в модели Мольтера для потенциала отдельного атома решетки с учетом тепловых колебаний атомов при  $T = 293$  К. В этой модели потенциальная энергия взаимодействия частицы с атомом определяется формулой [2, 3]

$$u_M(r) = \frac{Ze|e|}{r} \sum_i \alpha_i \exp(-\beta_i r/R), \quad (35.12)$$

где  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  — некоторые константы, определяемые из условия наилучшей аппроксимации потенциальной энергии взаимодействия частицы с атомом, получаемой методами Томаса — Ферми и Хартри — Фока (см. работы [4, 5] и ссылки в них). Такая аппроксимация достигается при следующих значениях констант  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ :

$$\{\alpha_i\} = \{0,1; 0,55; 0,35\}, \quad \{\beta_i\} = \{6,0; 1,2; 0,3\}.$$

Цифры у линий с равными значениями потенциальной энергии на рис. 5.2 соответствуют значениям  $U(\rho)$  в электронвольтах. Для электронов значения  $U(\rho)$  необходимо взять с обратным знаком. В центре ячейки величина  $U(\rho)$  принята равной нулю. На этом же рисунке представлены типичные траектории позитронов (кривые  $d$  и  $b$ ) и электронов (кривые  $c$  и  $a$ ) в плоскости  $(x, y)$ , ортогональной оси  $\langle 111 \rangle$ .

Мы видим, что движение позитронов и электронов в плоскости  $(x, y)$  может быть как финитным, так и инфинитным. Инфинитным движение будет у частиц, для которых выполняется условие

$$\varepsilon_{\perp}(\rho_0) > U_H, \quad (35.13)$$

где  $U_H$  — значение потенциальной энергии в седловой точке между ближайшими цепочками. Частицы в этом случае имеют достаточную энергию поперечного движения, чтобы они прошли над имеющимися потенциальными барьерами, поэтому такие частицы можно назвать надбарьерными.

Частицы, для которых выполняется неравенство

$$\varepsilon_{\perp}(\rho_0) < U_H, \quad (35.14)$$

противоположное неравенству (35.13), совершают финитное движение в плоскости  $(x, y)$ . Частицы в этом случае будут двигаться по кривым типа винтовой линии с осью вдоль оси  $z$  в каналах, образованных цепочками атомов, расположенными параллельно оси  $z$ . Такие частицы называются каналированными.

Заметим, что термин «каналированная частица» используется также для положительно заряженных частиц, поперечная

энергия которых  $\varepsilon_{\perp} = 1/2 E \psi^2$  удовлетворяет условиям  $U_H < \varepsilon_{\perp} < 1/2 E \psi_c^2$ , где  $\psi_c = \sqrt{4Ze^2/Ea_1}$  — критический угол осевого каналирования [1, 3]. Ясно, что частицы в этом случае совершают инфинитное движение в плоскости  $(x, y)$  в отличие от рассмотренных выше. Термин «канализованная частица» в случае движения положительно заряженных частиц в кристалле был введен в [1], чтобы выделить частицы, не подходящие близко к ядрам атомов решетки и по этой причине не участвующие в ядерных реакциях. Мы в дальнейшем термин «канализованная частица» будем относить к частицам, совершающим финитное движение в плоскости  $(x, y)$ , а термин «надбарьерная частица» — к частицам, совершающим инфинитное движение в этой плоскости.

Потенциал  $U(\rho)$ , в котором происходит движение частицы в кристалле, является довольно сложной функцией координат  $x$  и  $y$ . В некоторых случаях, однако, могут быть достигнуты упрощения этого потенциала. Так, если потенциалы соседних цепочек атомов кристалла не сильно перекрываются в пределах элементарной ячейки (см., например, рис. 5.2), то потенциал в пределах этой ячейки можно считать цилиндрически-симметричным:

$$U(\rho) = \begin{cases} U(\rho), & \rho \leq 1/2 \bar{a}, \\ 0, & \rho > 1/2 \bar{a}, \end{cases} \quad (35.15)$$

где  $\bar{a}$  — среднее расстояние между цепочками. Анализ различных процессов, сопровождающих прохождение частиц через кристалл, в этом случае существенно упрощается.

В конкретных вычислениях часто используются различные аппроксимации точной функции  $U(\rho)$  функциями более простого вида. Приведем некоторые из них.

Линдхардом [1] была предложена следующая оценка непрерывного потенциала отдельной цепочки атомов:

$$U_L(\rho) = \frac{1}{2} U_0 \ln \left( 1 + \frac{3R^2}{\rho^2} \right), \quad U_0 = \frac{2Ze|e|}{a_1}. \quad (35.16)$$

Эта функция правильно отражает поведение потенциала цепочки на малых расстояниях от оси цепочки при  $u^2 = 0$ .

При излучении процессов рассеяния и излучения быстрых частиц в кристалле иногда (см., например, [3, 6—8]) используется функция вида

$$U_1(\rho) = \alpha U_0 \frac{R}{\rho} + \beta, \quad (35.17)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — некоторые константы, определяемые из условия наилучшей аппроксимации реального потенциала цепочки



функцией такого вида. В поле (35.17) удается аналитически определить траекторию частицы.

Функции (35.16) и (35.17) хотя и позволяют упростить некоторые вычисления, но не позволяют правильно учесть реальный потенциал цепочки на малых расстояниях от оси. Действительно, эти функции сингулярны при  $\rho \rightarrow 0$ , тогда как реальный потенциал решетки при  $\rho \rightarrow 0$  конечен.

Учесть правильное поведение потенциала на малых расстояниях от оси цепочки можно, например, простой модификацией потенциала Линдхарда [9, 10]:

$$U(\rho) = U_1 \ln \left( 1 + \frac{\beta R^2}{\rho^2 + \alpha R^2} \right) - U_2, \quad (35.18)$$

где  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  — некоторые константы, определяемые из условия наилучшей аппроксимации реального потенциала цепочки функцией вида (35.18). Путем подбора этих констант удается с хорошей точностью (с точностью до нескольких

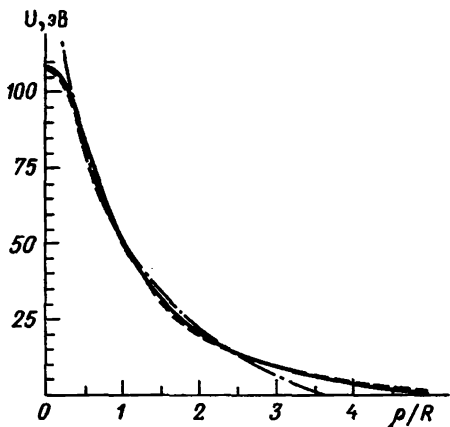


Рис. 5.3. Аппроксимация непрерывного потенциала цепочки атомов кристалла кремния, параллельной оси  $\langle 111 \rangle$ , функцией более простого вида; штриховая линия — функция (35.18), штрихпунктирная — функция (51.3)

процентов, см. рис. 5.3) аппроксимировать реальный потенциал  $U(\rho)$ , получаемый с помощью формулы (35.15) функцией вида (35.18). Значения констант  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  для некоторых кристаллов при  $T = 293$  К приведены в табл. 5.1.

### § 36. Возможность стохастического движения заряженной частицы в кристалле

Кристалл представляет собой периодическую структуру, поэтому, на первый взгляд, может показаться, что в такой структуре нет места для стохастичности и любое движение частицы должно быть регулярным, квазипериодическим. В действительности, однако, стохастичность может возникнуть и при движении частицы в кристалле, но причина ее будет лежать не в беспорядочном расположении атомов, как это имеет место в аморфной среде, а в особенностях самой динамики частицы в кристалле.

Таблица 5.1. Константы  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $\beta$  и  $\alpha$ , определяющие аппроксимацию непрерывного потенциала цепочки некоторых кристаллов функцией вида (35.18) при  $T=293$  К (Si\* соответствует  $T=0$  К)

Элемент	Ось	$U_1$ , эВ	$U_2$ , эВ	$\beta$	$\alpha$	$\bar{a}$
Si*	$\langle 111 \rangle$	53,3	3,15	2,0	0,16	$a/\sqrt{24}$
Si	$\langle 111 \rangle$	58,8	3,45	2,0	0,37	$a/\sqrt{24}$
Si	$\langle 110 \rangle$	60,0	5,40	3,5	0,37	$\sqrt{3}a/8$
Si	$\langle 100 \rangle$	66,6	3,90	1,5	0,48	$a/\sqrt{32}$
C	$\langle 110 \rangle$	34,0	8,30	2,5	0,048	$\sqrt{3}a/8$
C	$\langle 100 \rangle$	33,6	4,90	0,95	0,072	$a/\sqrt{32}$
Ge	$\langle 111 \rangle$	337	5,37	1,0	1,32	$a/\sqrt{24}$
W	$\langle 111 \rangle$	419	11,2	3,6	0,42	$a/\sqrt{6}$

Дело в том, что, как хорошо известно [11—14], даже при движении частицы в сравнительно простых полях, зависящих от двух координат, движение может носить не только регулярный, но и стохастический характер. Все определяется числом интегралов движения в рассматриваемой задаче. Так, например, в случае системы с двумя степенями свободы, обладающей двумя интегралами движения, любое финитное движение будет регулярным, квазипериодическим. Если же имеется только один интеграл, то движение будет стохастическим. Это явление называется динамическим хаосом. Хаотизация движения в заданном внешнем поле обуславливается неустойчивостью движения по отношению к изменению начальных условий в том смысле, что малое изменение начальных условий приводит к экспоненциальному разбеганию первоначально близких траекторий [12]. Такая неустойчивость приводит к тому, что если наблюдать за движением частицы в течение больших промежутков времени, то это движение будет восприниматься как случайное.

Рассмотрим в качестве примера финитное движение частицы в двумерном потенциале Хенона—Хейлса [15]:

$$U(x, y) = \frac{1}{2} \left( x^2 + y^2 + 2x^2y - \frac{2}{3}y^3 \right). \quad (36.1)$$

Гамильтониан, определяющий движение частицы в таком поле, имеет

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + U(x, y), \quad (36.2)$$

где  $p_x$  и  $p_y$  — компоненты импульса. Для простоты все переменные в (36.1) и (36.2) и сама энергия принимаются здесь безразмерными величинами.

Двумерный потенциал вида (36.1) возникает, например, в случае, когда поле, в котором движется заряженная частица, формируется тремя центрами во внутренней части треугольника, образованного этими центрами (предполагается, что данные центры не лежат на прямой). Ход потенциала (36.1) в декартовых координатах  $(x, y)$  представлен на рис. 5.4.

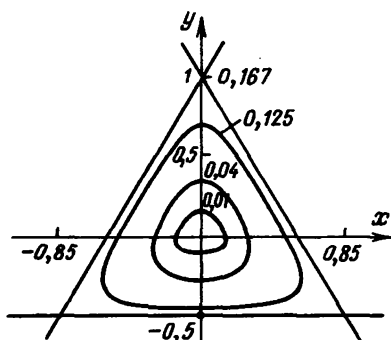


Рис. 5.4. Эквипотенциальные кривые потенциала Хенона—Хейлса (36.1) при  $E \leq 1/6$

Один интеграл движения системы, определяемой гамильтонианом (36.2), хорошо известен. Это полная энергия частицы

$$E = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + U(x, y). \quad (36.3)$$

Частица будет удерживаться внутри потенциальной ямы, образованной полем (36.1), если ее энергия  $E$  меньше граничного значения потенциальной энергии, равного  $U_{\max} = 1/6$ . При этом частица будет совершать финитное движение в поле (36.1).

Для того чтобы получить ответ на вопрос о существовании второго интеграла движения рассматриваемой системы, удобно воспользоваться методом сечений Пуанкаре [12—14]. Этот метод особенно эффективен для систем с двумя степенями свободы, чье фазовое пространство четырехмерно  $(x, p_x, y, p_y)$ . В силу сохранения энергии (36.3) фазовая траектория лежит на трехмерной поверхности

$$E(x, p_x, y, p_y) = \text{const}. \quad (36.4)$$

Рассмотрим точки пересечения фазовой траектории с некоторой плоскостью, например плоскостью  $(y, p_y)$ , т. е. положим в (36.4)  $x = \text{const}$ . Тогда в случае существования второго интеграла движения

$$J = J(x, p_x, y, p_y) \quad (36.5)$$

совокупность последовательных пересечений траектории выбранной плоскости будет лежать на некоторой кривой

$$y = y(p_y, J), \quad (36.6)$$

определяемой этим интегралом движения. Если же второй интеграл отсутствует, то точки пересечения будут хаотически распределены по некоторой части этой плоскости, в которой при заданном значении энергии возможно движение частицы.

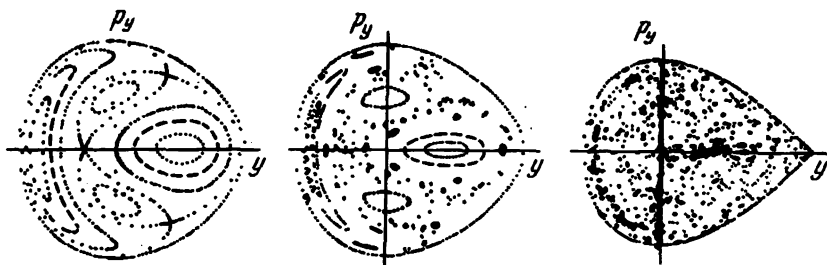


Рис. 5.5. Сечения Пуанкаре ( $x=0$ ) для частиц, движущихся в поле (36.1) при  $E=1/12$ ,  $1/8$  и  $1/6$

Таким образом, существование второго интеграла движения можно определить из анализа пересечений траектории с поверхностью  $(y, p_y)$ . Сечения Пуанкаре могут быть построены путем численного решения уравнений движения

$$\ddot{\rho} = -\nabla U(x, y), \quad \rho = (x, y). \quad (36.7)$$

На рис. 5.5 представлены результаты вычислений сечений Пуанкаре частиц, движущихся в поле (36.1), при различных значениях энергии  $E$  [16]. Полученные результаты показывают, что при малых значениях  $E$  практически во всей области фазового пространства, разрешенной для движения, второй интеграл движения уравнения (36.7) существует. Это, в свою очередь, означает, что при таких значениях  $E$  и практически для всех начальных условий переменные в уравнении (36.7) разделяются и движение частицы будет регулярным, квазипериодическим. Пример траектории, соответствующей такому движению, представлен на рис. 5.6, а.

При более высокой энергии ( $E=1/8$ ) в фазовом пространстве есть области, в которых второй интеграл существует («островки» в сечении Пуанкаре), и области, в которых второй интеграл отсутствует. Это означает, что для некоторых начальных условий движение частицы будет регулярным, квазипериодическим, а для других начальных условий движение будет нерегулярным, стохастическим.

При  $E=1/6$  практически при всех начальных условиях движение частицы в поле (36.1) будет хаотическим. Пример траектории, соответствующий такому движению, представлен на рис. 5.6, б.

Таким образом, движение частицы в двумерном потенциала вида (36.1) может быть как регулярным, так и хаотическим.

Именно такая ситуация имеет место и при движении быстрой заряженной частицы в кристалле под малым углом к одной из кристаллографических осей (оси  $z$ ) [17—19]. Действительно, как показано в предыдущем параграфе, движение в этом случае определяется, в основном, двумерно

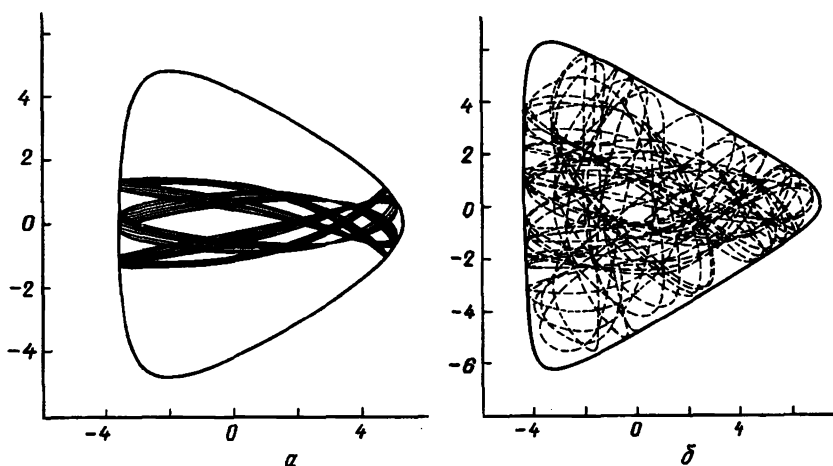


Рис. 5.6. Типичные траектории частицы в поле (36.1), соответствующие регулярному (а) и хаотическому (б) движению

непрерывным потенциалом цепочек атомов кристалла (35.8) — потенциалом решетки, усредненным по координате  $z$ . В таком поле продольная и поперечные компоненты импульса частицы в уравнении движения (35.6) разделяются, и мы приходим к задаче о двумерном движении в плоскости  $(x, y)$ , ортогональной оси  $z$ .

Потенциал  $U(\rho)$ , в котором происходит движение, является периодической функцией координат  $x$  и  $y$ . Поэтому может сложиться впечатление, что движение в таком поле может быть только квазипериодическим. Но это не так. Движение частицы в плоскости  $(x, y)$  может быть и регулярным, и стохастическим. Все определяется числом интегралов движения уравнения (35.7).

Один интеграл движения уравнения (35.7) хорошо известен [1]. Это интеграл энергии  $\varepsilon_{\perp}$  поперечного движения (35.11). В зависимости от величины  $\varepsilon_{\perp}$  движение частицы может быть как финитным (каналирование), так и инфинитным (надбарьерное движение) в плоскости  $(x, y)$ .

Если кроме  $\varepsilon_{\perp}$  существует второй интеграл движения, то переменные в уравнении (35.7) разделяются и движение частицы в поле  $U(\rho)$  будет регулярным. Существование второго интеграла движения в рассматриваемой задаче, однако, вовсе не является обязательным. Напротив, как будет показано ниже, очень часто второй интеграл движения уравнения (35.7) отсутствует. Движение частиц в кристалле в этом случае будет хаотическим.

Таким образом, и в кристалле возможно нерегулярное движение частицы, причем этот вывод в равной степени относится к движению как каналированных, так и надбарьерных частиц.

### § 37. Регулярное и нерегулярное движение релятивистских электронов при аксиальном каналировании

В этом параграфе мы рассмотрим движение релятивистского электрона в кристалле в условиях аксиального каналирования, т. е. финитного движения частицы в поле одной или нескольких цепочек атомов кристалла, и покажем, что оно может быть и регулярным, и хаотическим, в зависимости от числа интегралов движения уравнения (35.7).

В уравнение (35.7) входит потенциальная энергия  $U(\rho)$ , и мы должны иметь конкретное выражение для этой функции. В качестве примера рассмотрим вначале движение быстрого электрона в кристалле кремния вдоль оси  $\langle 111 \rangle$ . Эквипотенциали функции  $U(\rho)$  в этом случае представлены на рис. 5.2. Канализованный электрон в таком поле будет двигаться в поле одной из цепочек атомов кристалла, причем потенциал цепочки с хорошей точностью можно считать цилиндрически-симметричным (см. § 35).

Таким образом, мы приходим к задаче о финитном движении частицы в поле  $U_r(\rho)$ , зависящем только от модуля расстояния от частицы до оси цепочки. В таком поле, очевидно, кроме энергии поперечного движения  $\varepsilon_{\perp}$  сохраняется момент количества движения  $M$ . В цилиндрических координатах  $(\rho, \varphi)$ , согласно (35.7), эти интегралы движения будут определяться формулами [20]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\perp} &= \frac{1}{2} E \dot{\rho}^2 + \frac{M^2}{2E\rho^2} + U_r(\rho), \quad \varepsilon_{\perp} < 0, \\ M &= E\rho^2 \dot{\varphi}, \end{aligned} \quad (37.1)$$

где  $\varphi$  — азимутальный угол в плоскости  $(x, y)$ .

Из соотношений (37.1) находим, что

$$\begin{aligned} t &= \int \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{E}(\varepsilon_{\perp} - U_r(\rho)) - \frac{M^2}{E^2\rho^2}}} + \text{const}, \\ \varphi &= \int \frac{Md\rho/\rho^2}{\sqrt{2E(\varepsilon_{\perp} - U_r(\rho)) - M^2/\rho^2}} + \text{const}. \end{aligned} \quad (37.2)$$

Скорость радиального движения частицы  $\dot{\rho}$ , согласно (37.1), обращается в нуль при значениях  $\rho$ , определяемых из уравнения

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{M^2}{2E\rho^2} + U_r(\rho). \quad (37.3)$$

В случае финитного движения это уравнение имеет два корня:  $\rho_{\min}$  и  $\rho_{\max}$ . При этом зависимость  $\rho(t)$  будет периодической с периодом

$$T = 2 \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{E}(\varepsilon_{\perp} - U_r(\rho)) - \frac{M^2}{E^2\rho^2}}}. \quad (37.4)$$

Это, однако, еще не означает, что траектория частицы в рассматриваемом случае будет периодической. Дело в том, что за время  $T$  радиус-вектор повернется на угол

$$\Delta\varphi = 2 \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{Md\rho/\rho^2}{\sqrt{2E(\varepsilon_{\perp} - U_r(\rho)) - M^2\rho^{-2}}}. \quad (37.5)$$

Траектория частицы будет периодической только при значениях  $\Delta\varphi = 2\pi(m/n)$ , где  $m$  и  $n$  — целые числа. Таким образом, в общем случае траектория частицы, совершающей финитное движение в поле  $U_r(\rho)$ , является квазипериодической.

Если потенциал цепочки атомов определяется формулой (35.17), то задача нахождения траектории частицы в поле цепочки сводится к кеплеровой задаче о движении частицы в поле притяжения  $U_r(\rho) = -\alpha(R/\rho)$  [6—8]. При этом все интегрирования в формулах (37.2)—(37.5) могут быть выполнены аналитически. В результате находим, что в таком поле движение частицы происходит по эллипсу, по траектории, определяемой соотношением

$$p/\rho = 1 + e \cos \varphi, \quad (37.6)$$

здесь  $p = M^2/\alpha ER$  и  $e = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{\perp} M^2/\alpha ER}$  — эксцентриситет орбиты. Период орбиты при этом равен

$$T = \pi\alpha R \sqrt{E/2|\varepsilon_{\perp}|^3}, \quad (37.7)$$

а зависимость  $\rho = \rho(t)$  определяется следующим параметрическим представлением:

$$\rho = a(1 - e \cos \xi), \quad t = \sqrt{Ea^3/\alpha R}(\xi - e \cos \xi), \quad (37.8)$$

где  $a = \alpha R/2|\varepsilon_{\perp}|$  — большая полуось эллипса.

Приведенные выше соотношения показывают, что если потенциал цепочки атомов, в которой движется каналированный электрон, является цилиндрически-симметричным, то движение электрона будет регулярным квазипериодическим. Такая ситуация реализуется, например, при движении частицы в кристалле кремния вдоль оси  $\langle 111 \rangle$ . При прохождении электронов через кристалл, однако, существуют и такие ориентации кристаллических осей относительно падающего пучка, когда замена потенциала цепочки атомов функцией, зависящей только от  $\rho$ , является недопустимой.

Действительно, пусть электрон движется в кристалле кремния вдоль оси  $\langle 110 \rangle$ . Эквипотенциальные поверхности потенциальной энергии в этом случае представлены на рис. 5.7. Мы видим, что в рассматриваемом случае потенциалы соседних цепочек атомов сильно перекрываются, что, в свою очередь, приводит к значительной асимметрии распределения результирующего потенциала.

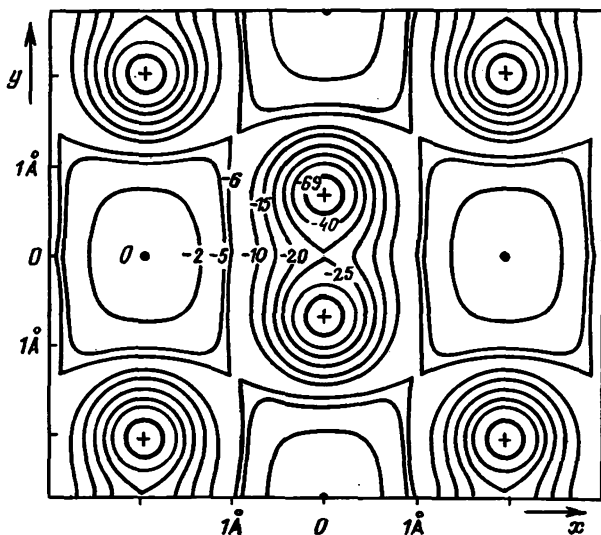


Рис. 5.7. Эквипотенциальные поверхности непрерывной потенциальной энергии  $U(\rho)$  взаимодействия электрона с кристаллом кремния при движении частицы вдоль оси  $\langle 110 \rangle$ . Цифры у кривых соответствуют значениям  $U(\rho)$  в эВ

Функция  $U(\rho)$  имеет глубокие минимумы при значениях координат, определяющих положения цепочки атомов в плоскости  $(x, y)$ , и седловые точки на прямых, соединяющих ближайшие цепочки. Канализованные электроны в таком поле в зависимости от величины поперечной энергии  $\epsilon_{\perp}$  могут двигаться в поле либо одной, либо двух цепочек атомов.

Изменение характера движения электрона естественно ожидать при таких значениях  $\epsilon_{\perp}$ , когда электрон имеет возможность попасть в область с отрицательной кривизной потенциальной энергии, где его движение является неустойчивым. Это значит, что две близкие в фазовом пространстве траектории после прохождения области с отрицательной кривизной потенциальной энергии в дальнейшем экспоненциально расходятся друг относительно друга [12]. Кривизна заведомо отрицательна в некоторой окрестности седловой точки, поэтому рассмотрим движение электрона при поперечных энергиях, сравнимых со значением потенциальной энергии в седловой точке  $U_c$ .

Для того чтобы получить ответ на вопрос о существовании второго интеграла движения уравнения (35.7) в рассматриваемом случае  $\epsilon_{\perp} < U_c < 0$  и, следовательно, о характере движения канализованного электрона в поле, представленном на рис. 5.7, удобно воспользоваться методом сечений Пуанкаре. С этой целью рассмотрим совокупность пересечений фазовой траектории, соответствующей заданному значению  $\epsilon_{\perp}$ , с плоскостью  $(y, \dot{y})$  при значении координаты  $x=0$ . Тогда, если помимо интеграла энергии поперечного движения  $\epsilon_{\perp}$  существует



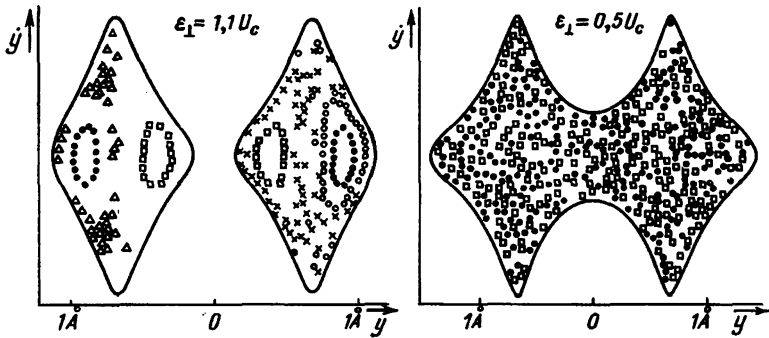


Рис. 5.8. Сечения Пуанкаре при аксиальном каналировании электронов в кристалле кремния вдоль оси  $\langle 110 \rangle$

второй интеграл движения  $J$ , то совокупность точек пересечения траектории указанной плоскости будет образовывать некоторую кривую  $y = y(\dot{y}, \epsilon_{\perp}, J)$ , определяемую этими интегралами движения, или же проходить через избранные точки плоскости. В противном же случае точки пересечения будут хаотически распределены по некоторой части фазовой плоскости  $(y, \dot{y})$ , разрешенной для движения. Сечения Пуанкаре могут быть построены путем численного решения уравнения (35.7) при задании различных начальных условий для траектории. Эта задача была поставлена и численным образом решена в работе [17].

На рис. 5.8 представлены сечения Пуанкаре ( $x=0$ ) при  $\epsilon_{\perp} = 1,1 U_c$  и  $0,5 U_c$ . В этих случаях движение частицы происходит соответственно в одной и в двух потенциальных ямах. Различные значки отвечают различным начальным условиям.

На рис. 5.9 представлены типичные траектории каналированного электрона в плоскости  $(x, y)$ , соответствующие различным начальным условиям при  $\epsilon_{\perp} = 1,1 U_c$  и  $0,5 U_c$ .

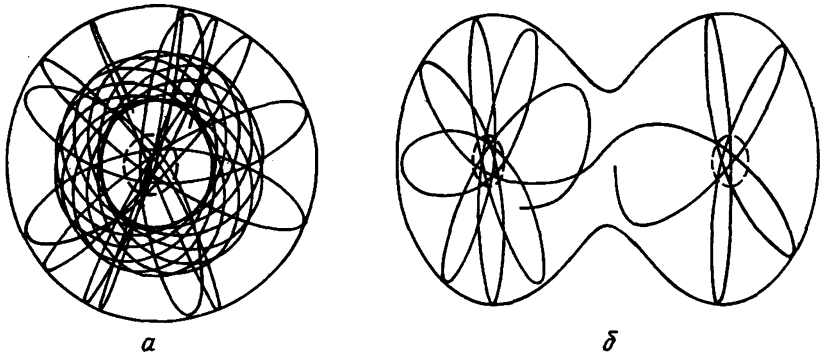


Рис. 5.9. Регулярные и хаотические траектории каналированного электрона в плоскости, перпендикулярной оси  $\langle 110 \rangle$  канала кристалла кремния, при  $\epsilon_{\perp} = 1,1 U_c$  (а) и  $0,5 U_c$  (б); штриховые линии ограничивают области с положительной кривизной потенциальной энергии

Полученные результаты показывают, что при  $\varepsilon_{\perp} = 1,1 U_c$  в зависимости от начальных условий наряду с квазипериодическим имеет место хаотическое движение частицы в канале. По мере увеличения значения  $\varepsilon_{\perp}$  совокупность начальных условий, для которых движение является хаотическим, увеличивается. При  $\varepsilon_{\perp} = 0,5 U_c$  явление динамического хаоса проявляется практически для всех начальных условий.

Заметим, что в кристалле стохастичность может вызываться и взаимодействием частицы с неоднородностями потенциала кристаллической решетки, а также с примесями. Эти факторы тоже приводят к нарушению устойчивости движения каналированных электронов [21]. Влияние их на движение частицы в кристалле будет рассмотрено в гл. 8.

### § 38. Рассеяние быстрых заряженных частиц на отдельной цепочке атомов

Движение быстрой заряженной частицы в поле непрерывного потенциала цепочек атомов кристалла, как показано в § 35, может быть как финитным, так и инфинитным в плоскости, ортогональной оси цепочек. Доля частиц, совершающих финитное движение в этой плоскости, определяется соотношением

$$\Phi = na_1 \int d^2 \rho_0 \Theta \left( U_H - \frac{1}{2} E \psi^2 - U(\rho_0) \right), \quad (38.1)$$

где  $\rho_0$  — точка влета и  $\Theta(x)$  — ступенчатая функция Хевисайда. Интегрирование в (38.1) ведется в пределах элементарной ячейки в плоскости  $(x, y)$ .

Формула (38.1) показывает, что для положительно заряженных частиц (позитронов) финитное движение возможно только при  $\psi < \psi_H$ , где  $\psi_H = \sqrt{2U_H/E}$ ,  $\psi_H \ll \psi_c$ . Для электронов, согласно (38.1), финитное движение возможно, если  $\psi < \psi_c$ . При падении частиц на кристалл кремния под малым углом  $\psi$  к оси  $\langle 111 \rangle$  зависимость  $\Phi$  от  $\psi$  представлена на рис. 5.10. Приведенный график показывает, что даже при  $\psi < \psi_c$  в широком интервале углов  $\psi$  доля электронов, захваченных в канал при входе в кристалл, весьма мала.

При  $\psi > \psi_c$  все падающие на кристалл частицы будут совершать инфинитное движение в поперечной плоскости, причем вплоть до углов

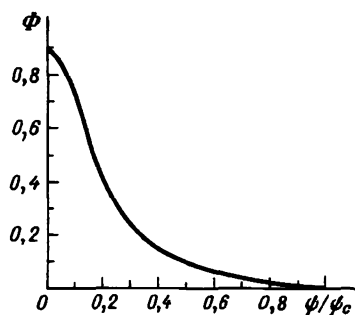


Рис. 5.10. Доля частиц, захваченных в канал при входе пучка электронов в кристалл кремния под малым углом  $\psi$  к оси  $\langle 111 \rangle$

$\psi \sim R/a_1$  ( $R/a_1 \gg \psi_c$ ) движение частиц в кристалле будет определяться непрерывным потенциалом цепочек атомов кристалла.

Таким образом, в широком интервале углов  $\psi$  практически все падающие на кристалл частицы будут двигаться в кристалле в условиях надбарьерного движения. Выясним особенности рассеяния этой группы частиц в поле непрерывного потенциала цепочек атомов (35.8).

Заметим предварительно, что существенные изменения траектории надбарьерной частицы в кристалле происходят на расстояниях наибольшего ее сближения с осью цепочки, где градиенты потенциала максимальны и непрерывный потенциал можно считать цилиндрически-симметричным. Поэтому при рассмотрении рассеяния надбарьерных частиц на не очень малые углы в первом приближении можно считать, что в пределах элементарной ячейки с центром на оси цепочки непрерывный потенциал является цилиндрически-симметричным. Анализ ряда процессов, таких как рассеяние и излучение, в этом приближении существенно упрощается и может быть проведен аналитическими методами как в рамках классической, так и в квантовой механике. В настоящем параграфе мы рассмотрим рассеяние частицы в кристалле в рамках классической механики.

Надбарьерная частица при своем движении в кристалле последовательно сталкивается с различными цепочками атомов кристалла, расположенными параллельно оси  $z$ , поэтому рассеяние такой частицы будет определяться особенностями ее взаимодействия с полем отдельной цепочки атомов и особенностями многократного рассеяния на различных цепочках. Выясним сперва особенности рассеяния надбарьерной частицы в поле отдельной цепочки атомов [9, 22]. Многократное рассеяние надбарьерных частиц на цепочках атомов будет рассмотрено в § 41.

При рассеянии быстрой заряженной частицы в поле непрерывного потенциала цепочки атомов кристалла  $U_r(\rho)$  существует три интеграла

движения, определяющих траекторию частицы. Это — интеграл составляющей импульса частицы  $p_z$ , параллельной оси цепочки, интеграл энергии поперечного движения  $\epsilon_{\perp} = \int_{1/2} E \psi^2$  ( $\epsilon_{\perp} \ll E$ ) и момент количества движения относительно оси цепочки  $M$ . Последняя величина может быть связана соотношением  $M = E \psi b$  с прицельным параметром цепочки  $b$  (рис. 5.11).

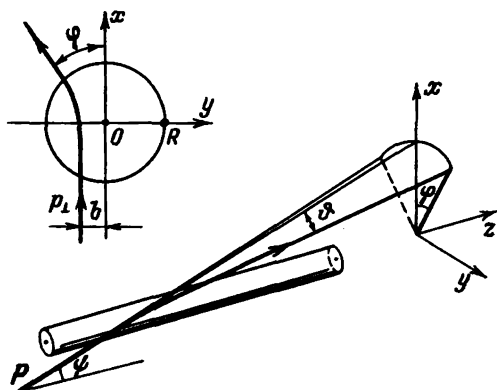


Рис. 5.11. Рассеяние быстрой частицы в поле непрерывного потенциала цепочки атомов

Используя эти интегралы движения, легко показать, что траектория частицы в плоскости  $(x, y)$ , ортогональной оси цепочки, будет определяться соотношениями

$$t = \pm \frac{1}{\psi} \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho \left( 1 - \frac{U_r(\rho)}{\varepsilon_{\perp}} - \frac{b^2}{\rho^2} \right)^{-1/2}, \quad (38.2)$$

$$\varphi = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{M d\rho}{\rho^2} \left[ 2E(\varepsilon_{\perp} - U_r(\rho)) - \frac{M^2}{\rho^2} \right]^{-1/2}.$$

Здесь  $\rho_0$  — расстояние наибольшего сближения частицы с осью цепочки (см. формулы (37.2) и знаки «+» и «-» соответствуют участкам траектории, на которых частица удаляется и приближается к оси цепочки (постоянная интегрирования в (38.2) выбрана так, чтобы при  $\rho = \rho_0$  выполнялось условие  $t(\rho_0) = 0$ ).

Приведенные формулы показывают, что рассеяние частицы в поле непрерывного потенциала цепочки возможно только вдоль азимутального угла  $\varphi$  в плоскости, ортогональной оси  $z$ . При этом полный угол  $\vartheta$  рассеяния частицы цепочкой связан с азимутальным углом ее рассеяния  $\varphi$  соотношением (см. рис. 5.11)

$$\vartheta = 2\psi \sin\left(\frac{1}{2}\varphi(b)\right), \quad (38.3)$$

$$\varphi(b) = \pi - 2b \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^2} \left( 1 - \frac{U_r(\rho)}{\varepsilon_{\perp}} - \frac{b^2}{\rho^2} \right)^{-1/2}.$$

Функция  $\varphi(b)$ , определяющая зависимость угла рассеяния от прицельного параметра, носит название функции отклонения частицы в поле  $U_r(\rho)$  [23]. Функция отклонения, аналогичная функции  $\varphi(b)$ , как известно [23—27], играет важную роль в теории рассеяния волн и частиц сферически-симметричными рассеивающими центрами, такими как капельки воды, атомы и атомные ядра, — она определяет сечения рассеяния частиц в этих случаях. Как будет показано ниже, функция  $\varphi(b)$  будет определять и сечение рассеяния быстрых заряженных частиц на цепочке атомов.

Если  $\varepsilon_{\perp} \gg |U_r|$ , т. е. если  $\psi \gg \psi_c$ , то  $|\varphi(b)| \ll 1$  и в первом приближении по параметру  $U_r/\varepsilon_{\perp}$  имеем

$$\vartheta \approx \psi \cdot \varphi(b), \quad \varphi(b) \approx \frac{1}{2\varepsilon_{\perp}} \frac{d}{db} \int_{-\infty}^{+\infty} dx U_r(\sqrt{x^2 + b^2}). \quad (38.4)$$

Прежде чем переходить к анализу процесса рассеяния частиц высоких энергий в поле непрерывного потенциала

цепочки атомов, отметим факты, хорошо известные в теории рассеяния быстрых частиц отдельными атомами и атомными ядрами [24, 25]: (i) в общем случае для вычисления функции отклонения требуется, за исключением тривиальных потенциалов (потенциалов вида  $U_1(\rho) \sim \rho^{-1}$  и  $U_2(\rho) \sim \rho^{-2}$ ), проведение численного интегрирования и (ii) использование в вычислениях тривиальных потенциалов не позволяет описать ряд важных эффектов в рассеянии, таких, например, как эффекты радужного рассеяния и закручивания частиц.

Для описания движения в кристалле каналированных частиц с целью упрощения вычислений иногда используется аппроксимация непрерывного потенциала цепочки атомов функцией вида  $U_1(\rho) = \alpha U_0 R / \rho$  (см. формулу (35.17)). Эта функция хорошо аппроксимирует потенциал цепочки атомов на расстояниях  $\rho \sim R$ . При такой аппроксимации потенциал интегрирование в (38.3) может быть выполнено аналитически:

$$|\varphi(b)| = 2 \arcsin \frac{R}{R^2 + 4\beta^4 b^2}, \quad (38.5)$$

где  $\beta_1 = \psi / \psi_1$  и  $\psi_1 = \sqrt{2\alpha U_0 / E}$ . Формула (38.5) показывает, что в поле вида  $U_1(\rho)$  величина  $|\varphi(b)|$  не зависит от знака заряда частицы и изменяется с уменьшением  $b$  монотонно на интервале  $(0, \pi)$  при всех значениях  $\psi$ .

Иная картина процесса рассеяния быстрых частиц на цепочке атомов имеет место в случае, когда потенциал цепочки представляет собой потенциал Линдхарда (35.16). Для такого потенциала вычисление функции отклонения может быть проведено аналитически только в области больших и в области малых значений прицельного параметра.

В области больших значений  $b$  ( $b \gg R$ ) потенциальная энергия  $U_L(\rho)$  мала по сравнению с  $\varepsilon_{\perp}$ , поэтому в (38.3) может быть выполнено разложение по параметру  $U_L / \varepsilon_{\perp}$ . В первом приближении такого разложения находим, что

$$|\varphi(b)| = \frac{\pi}{2\beta^2} \left( 1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 + 3R^2}} \right), \quad \beta = \frac{\psi}{\psi_c}. \quad (38.6)$$

Формула (38.6) показывает, что при больших значениях прицельного параметра величина  $|\varphi(b)|$  не зависит от знака заряда частицы и что  $|\varphi(b)|$  быстро растет с уменьшением  $b$  и  $\psi$ .

Для электронов при малых значениях прицельного параметра ( $b \rightarrow 0$ ) основной вклад в функцию отклонения дают значения  $\rho \sim R$ . В этой области  $\rho$  входящую в (38.3) медленно меняющуюся логарифмическую функцию можно заменить на константу. При этом, как легко проверить, при  $b \rightarrow 0$   $\varphi(b) \rightarrow 0$ . Таким образом, при рассеянии цепочкой атомов кристалла электронов функция  $|\varphi(b)|$  должна иметь максимум при некотором ненулевом значении прицельного параметра.

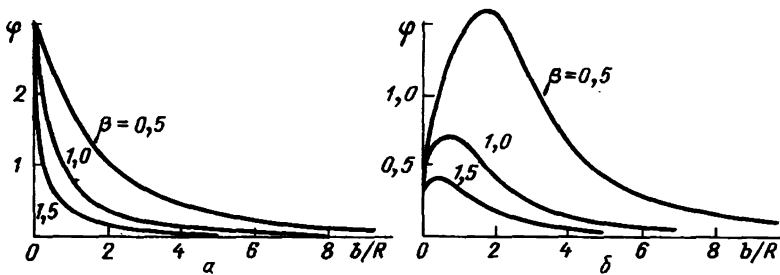


Рис. 5.12. Зависимость азимутального угла рассеяния позитронов (а) и электронов (б) от прицельного параметра при рассеянии частиц в поле непрерывного потенциала Линдхарда (35.16)

Для позитронов имеем  $\varphi(b) \rightarrow \pi$  при  $b \rightarrow 0$ .

На рис. 5.12 представлены результаты численного интегрирования функции отклонения для потенциала Линдхарда при различных значениях угла  $\psi$ . Кривые описывают рассеяние на цепочке атомов позитронов (а) и электронов (б). Цифры у кривых соответствуют значениям  $\beta = \psi/\psi_c$ , для которых проводились вычисления. На рис. 5.13 представлены типичные траектории позитронов (а) и электронов (б) в поле отдельной цепочки атомов в плоскости  $(x, y)$ , соответствующие найденным функциям отклонения этих частиц (см. рис. 5.12).

Приведенные кривые показывают, что для позитронов  $\varphi(b)$  является монотонной функцией прицельного параметра, причем при всех значениях угла  $\psi$  эта функция принимает значения на интервале углов рассеяния  $\varphi$  от 0 до  $\pi$ .

Для электронов нет однозначного соответствия между углом рассеяния и прицельным параметром. В этом случае  $|\varphi(b)|$  имеет максимум при некотором значении прицельного параметра  $b = b_r$ , причем с уменьшением  $\psi$  положение этого максимума смещается в область больших значений  $b$ , а величина максимального угла рассеяния растет.

Полученные результаты показывают, что характер рассеяния электронов в поле непрерывного потенциала Линдхарда существенно отличается от характера рассеяния в поле вида

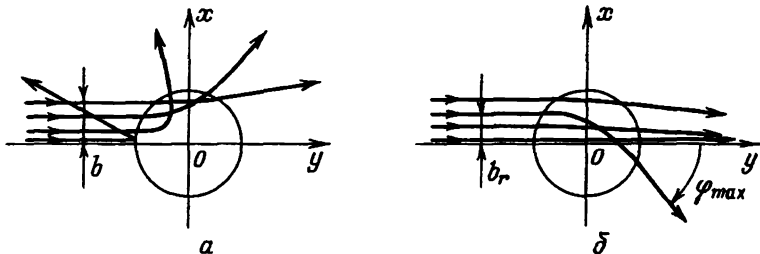


Рис. 5.13. Типичные траектории позитронов (а) и электронов (б) в поле отдельной цепочки атомов

$U_1(\rho) = \alpha U_0 R / \rho$ . Связано это с тем, что функция  $U_1(\rho)$  дает существенно завышенный результат для непрерывного потенциала цепочки атомов на малых расстояниях от ее оси, поэтому использование этой функции для описания движения в кристалле надбарьерных частиц может привести к совершенно неправильной картине в рассеянии частиц.

Приведенные на рис. 5.12 графики относятся к случаю, когда атомы расположены строго на оси цепочки. Вследствие термодинамических флуктуаций, однако, всегда существует некоторый разброс положений атомов относительно их равновесных положений в решетке. В результате этого разброса непрерывный потенциал на малых расстояниях от цепочки уменьшается по сравнению с непрерывным потенциалом в случае, когда термодинамические флуктуации отсутствуют. Покажем, как этот фактор сказывается на рассеянии частиц.

С этой целью рассмотрим рассеяние позитронов и электронов на цепочке атомов кристалла кремния в случае, когда частицы движутся вблизи кристаллографической оси  $\langle 111 \rangle$  и температура кристалла равна комнатной. Непрерывный потенциал цепочки в этом случае с хорошей точностью как на малых, так и на больших расстояниях от оси цепочки может быть аппроксимирован функцией вида (35.18). Точность аппроксимации иллюстрирует рис. 5.3.

В поле с таким распределением потенциала функция отклонения может быть найдена только численными методами. Результаты вычислений представлены на рис. 5.14. Полученные кривые показывают, что для позитронов при  $\beta < 1$  функция отклонения является однозначной функцией прицельного параметра, а при  $\beta > 1$  эта функция двузначна. Для электронов же при всех значениях  $\beta$  функция отклонения двузначна. Различное поведение функций отклонения позитронов при  $\beta < 1$  и  $\beta > 1$  обусловлено тем, что при  $\beta < 1$  позитроны не могут подойти на близкие расстояния к оси цепочки, тогда как при  $\beta > 1$  это возможно. Напомним, что в случае потенциала

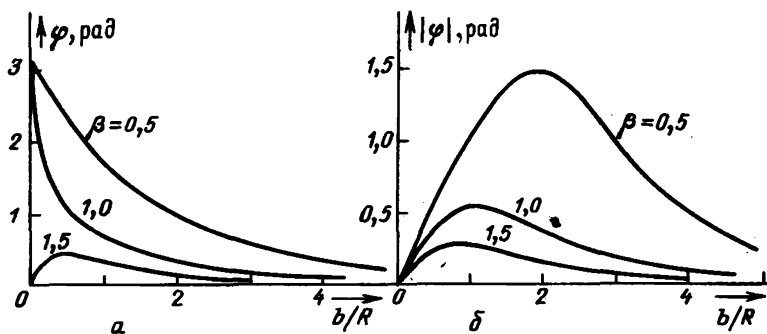


Рис. 5.14. Учет влияния температуры кристалла на функцию отклонения позитронов (а) и электронов (б) при движении частиц вблизи оси  $\langle 111 \rangle$  кристалла кремния

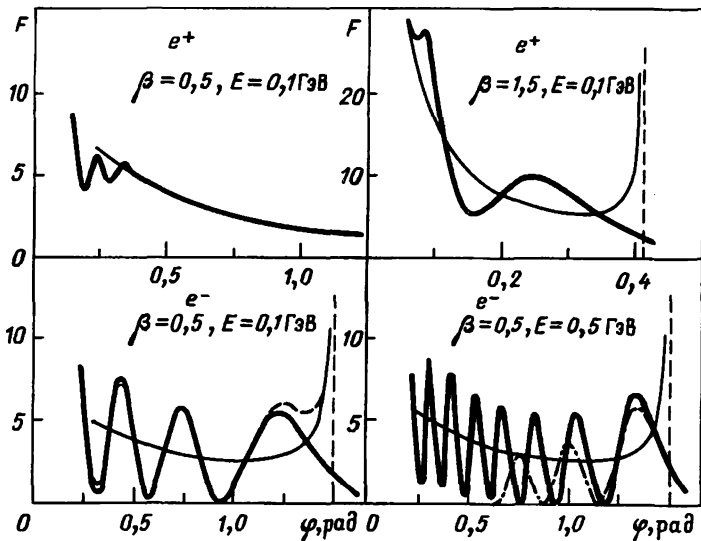


Рис. 5.15. Квантовое (жирные линии) и классическое (тонкие линии) сечения рассеяния позитронов и электронов цепочкой атомов при различных ориентациях оси  $\langle 111 \rangle$  кристалла кремния относительно пучка; штриховая линия — вычисления по формуле (39.14), штрихпунктирная — по формуле (39.16)

Линдхарда (35.16) ни при каких значениях параметра  $\beta$  позитроны не могут пройти через ось цепочки, что связано с сингулярным поведением этого потенциала при  $\rho \rightarrow 0$ .

Таким образом, учет влияния теплового разброса положений атомов в решетке на форму непрерывного потенциала цепочки на малых расстояниях от ее оси существенно сказывается на характере рассеяния цепочкой атомов позитронов, но не приводит к качественно новым эффектам в рассеянии электронов. В дальнейшем мы будем интересоваться, в основном, рассеянием и излучением электронов и позитронов на цепочке атомов в случае, когда непрерывный потенциал цепочки аппроксимируется функцией вида (38.18).

Зная функцию отклонения, можно вычислить в рамках классической механики дифференциальное сечение рассеяния частиц на цепочке атомов в интервал углов  $(\varphi, \varphi + d\varphi)$ . С учетом двузначности функции отклонения сечение рассеяния определяется соотношением [28, 29]

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\varphi} = L\psi \sum_i \left| \frac{d\varphi}{db} \right|_i^{-1}, \quad (38.7)$$

где  $L$  — длина цепочки и суммирование ведется по однозначным ветвям функции  $\varphi(b)$ .

На рис. 5.15 сплошными тонкими линиями представлены результаты вычислений сечений рассеяния позитронов и электронов



по формуле (38.7) классической механики в поле непрерывного потенциала цепочки атомов (35.18) в случае рассеяния частиц в кристалле кремния ( $T=293$  К) на цепочке атомов, параллельной оси  $\langle 111 \rangle$ . По оси ординат на этом рисунке отложена величина  $F=(LR\psi)^{-1}(d\sigma/d\varphi)$ .

Полученные результаты показывают, что для позитронов при  $\psi < \psi_c$  сечение является монотонной функцией угла  $\varphi$ . Для электронов же (и для позитронов при  $\psi > \psi_c$ ) классическое сечение рассеяния отлично от нуля на интервале углов от  $\varphi=0$  до  $\varphi_{\max}=|\varphi(b_r)|$ , причем при  $\varphi \rightarrow \varphi_{\max}$  сечение (38.7) неограниченно растет. Связано это с тем, что при  $\varphi \rightarrow \varphi_{\max}$  производная функции отклонения стремится к нулю.

### § 39. Квантовые эффекты при рассеянии частиц на цепочке атомов

Если угол рассеяния является неоднозначной функцией прицельного параметра, то при рассеянии могут проявляться своеобразные интерференционные явления. Такая ситуация имеет место при рассеянии волн и частиц на капельках воды, на атомах и атомных ядрах. При этом возникают такие явления, как радужное рассеяние и закручивание частиц [23—27]. Рассмотрение интерференционных явлений в рассеянии возможно только в рамках волновой оптики или волновой механики. Интересуясь этими явлениями, мы изложим теперь квантово-механическую теорию рассеяния электронов и позитронов на цепочке атомов кристалла [22, 28—30].

В квантовой механике сечение рассеяния быстрых заряженных частиц в поле непрерывного потенциала цепочки атомов кристалла может быть представлено в виде (см. Приложение 2)

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = L\psi |f(\varphi)|^2, \quad (39.1)$$

где  $f(\varphi)$  — амплитуда рассеяния,

$$f(\varphi) = \frac{1}{2\pi i p_{\perp}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{2i\eta_n} - 1) e^{-in\varphi}, \quad (39.2)$$

$p_{\perp} = E\psi$  и  $\eta_n$  — фазы рассеяния.

Из результатов классической теории рассеяния следует, что характерные значения прицельных параметров для процесса упругого рассеяния частиц на цепочке атомов по порядку величины равны  $|b| \sim R$ . В этой области прицельных параметров велики значения момента частицы относительно оси цепочки  $M \sim p_{\perp} R$  по сравнению с постоянной Планка  $\hbar$ , поэтому основной вклад в амплитуду рассеяния должны вносить слагаемые с большим значением  $|n| \sim M/\hbar$ . В этом случае для определения фаз рассеяния можно воспользоваться квази-

классическим приближением. В этом приближении (см. Приложение 3)

$$\eta_n = \frac{1}{2} \pi |n| - p_{\perp} \rho_0 + \int_{\rho_0}^{\infty} d\rho (\sqrt{p_{\perp}^2 - 2EU_r(\rho) - n^2 \rho^{-2}} - p_{\perp}). \quad (39.3)$$

При выводе этого выражения для фаз рассеяния используются те же преобразования, что и при выводе соответствующего выражения для фаз рассеяния частиц в поле, обладающем сферической симметрией (см., например, [5]).

Вычисление сечения (39.1) в поле вида (35.18) может быть проведено только численными методами. Результаты вычислений представлены на рис. 5.15 сплошными жирными линиями. Приведенные кривые показывают, что для позитронов при  $\psi < \psi_c$  квантовое сечение рассеяния (39.1) содержит небольшие осцилляции относительно классического сечения в области малых углов  $\varphi$ . Эти осцилляции обусловлены дифракционными эффектами при рассеянии частиц на цепочке атомов.

Для электронов при всех значениях углов  $\psi$  (и для позитронов при  $\psi > \psi_c$ ) квантовое сечение рассеяния содержит большие осцилляции относительно величины  $d\sigma_{cl}/d\varphi$  в области углов рассеяния  $\varphi < \varphi_{\max}$ , а в области  $\varphi > \varphi_{\max}$  сечение (39.1) быстро убывает с ростом  $\varphi$ . С увеличением энергии частицы осцилляции становятся более частыми.

Рассмотрим теперь некоторые предельные случаи квантовой формулы для сечения рассеяния быстрых частиц на цепочке атомов и покажем, что большие осцилляции квантового сечения рассеяния относительно классического сечения обусловлены двузначностью функции отклонения  $\varphi(b)$ . Предварительно заметим, что в квазиклассическом приближении фазы рассеяния (39.3) медленно изменяются с ростом  $n$ , поэтому суммирование по  $n$  в (39.2) с помощью соотношения  $n = p_{\perp} b / \hbar$  можно заменить интегрированием по прицельному параметру  $b$ :

$$f(\varphi) = \sqrt{\frac{p_{\perp}}{2\pi i}} \int_{-\infty}^{+\infty} db e^{-i p_{\perp} b \varphi / \hbar} (e^{2i\eta(b)} - 1), \quad (39.4)$$

где  $\eta(b)$  — фаза рассеяния, определяемая формулой (39.3) с  $n = p_{\perp} b / \hbar$ .

Если энергия поперечного движения велика по сравнению с глубиной потенциальной ямы, то в (39.3) можно выполнить разложение по параметру  $(U_r/\varepsilon_{\perp})$ . В первом приближении такого разложения, соответствующем эйкональному приближению, имеем

$$\eta(b) = -\frac{1}{2\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx U_r(\sqrt{x^2 + b^2}). \quad (39.5)$$

В области значений прицельных параметров  $b \sim R$ , дающих главный вклад в сечение рассеяния, согласно (39.5), по порядку величины

$$\eta(b) \sim \frac{RZe^2}{a_1 \psi \hbar}.$$

Последняя величина имеет простой физический смысл. Она представляет собой произведение константы взаимодействия частицы с отдельным атомом цепочки  $Ze^2/\hbar v$  и числа атомов  $N \sim R/a_1 \psi$ , с которыми эффективно взаимодействует частица при прохождении через цепочку под углом  $\psi$  к ее оси. Иными словами, в рассматриваемом случае в качестве эффективной константы взаимодействия частицы с цепочкой атомов выступает не величина  $Ze^2/\hbar v$ , а величина  $NZe^2/\hbar v$ . При этом в зависимости от значения  $N$  эффективная константа взаимодействия частицы с цепочкой атомов может быть как малой, так и большой по сравнению с единицей.

Если  $NZe^2/\hbar v \ll 1$ , то в формуле (39.4) можно выполнить разложение по  $\eta(b)$ . В первом приближении такого разложения получим амплитуду упругого рассеяния быстрых частиц на цепочке атомов в борновском приближении:

$$f(\varphi) = \frac{1}{\psi} \sqrt{\frac{ip_{\perp}}{2\pi}} \int dx db e^{ip_{\perp} b \varphi / \hbar} U_r(\sqrt{x^2 + b^2}). \quad (39.6)$$

Сечение рассеяния в этом случае не зависит от знака заряда частицы и определяется формулой

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = \frac{LE}{2\pi} \left| \int dx db U_r(\rho) e^{ip_{\perp} b \varphi / \hbar} \right|^2. \quad (39.7)$$

Если  $NZe^2/\hbar v \gg 1$ , то для нахождения амплитуды рассеяния можно воспользоваться методом стационарной фазы. Точка стационарной фазы в формуле (39.4) определяется из условия

$$\varphi = \frac{2}{p_{\perp}} \frac{d}{db} \eta(b). \quad (39.8)$$

Правая часть этого уравнения представляет собой функцию отклонения частицы в поле цепочки атомов, введенную в предыдущем параграфе:

$$\varphi(b) = \frac{2}{p_{\perp}} \frac{d}{db} \eta(b). \quad (39.9)$$

Таким образом, соотношение (39.8) представляет собой уравнение для определения прицельного параметра, соответствующего рассеянию частицы по классической траектории на угол  $\varphi$ . Заметим, что стационарных точек может быть несколько, т. е. уравнение (39.8) может иметь несколько решений. В частности, может быть две стационарных точки — в

этом случае амплитуда рассеяния будет содержать вклады, вносимые каждой из стационарных точек в отдельности. Рассмотрим вначале случай одной стационарной точки.

Раскладывая фазу рассеяния в окрестности точки стационарной фазы  $b = b_0$ , имеем

$$\eta(b) \approx \eta(b_0) + \left(\frac{d\eta}{db}\right)_0 (b - b_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\eta}{db^2}\right)_0 (b - b_0)^2 + \dots \quad (39.10)$$

При этом с учетом соотношения (39.9) амплитуда рассеяния приобретает вид

$$f(\varphi) = \sqrt{\frac{p_\perp}{2\pi i}} e^{-ip_\perp b_0 \varphi / \hbar} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} db \exp \left\{ 2i \left[ \eta(b_0) + \frac{1}{4} p_\perp \left(\frac{d\varphi}{db}\right)_0 (b - b_0)^2 + \dots \right] \right\}. \quad (39.11)$$

Если  $(d\varphi/db)_0 \neq 0$ , то

$$f(\varphi) = \left| \frac{d\varphi}{db} \right|_0^{-1/2} \exp [2i\eta(b_0) - ip_\perp b_0 \varphi / \hbar]. \quad (39.12)$$

Сечение рассеяния в этом случае совпадает с соответствующим результатом классической теории рассеяния:

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = \frac{d\sigma_{cl}}{d\varphi} = L \psi \left| \frac{d\varphi}{db} \right|_0^{-1}. \quad (39.13)$$

Формула (39.5) для фазы рассеяния справедлива, если  $|U_p| \ll \varepsilon_\perp$ , т. е. если угол падения частиц на цепочку  $\psi$  превышает критический угол осевого каналирования  $\psi_c$ . При нарушении этого условия для описания рассеяния на цепочке атомов надбарьерных частиц необходимо пользоваться формулой (39.4) с фазами рассеяния  $\eta(b)$ , определяемыми соотношением (39.3). Так как при  $\psi \sim \psi_c$  фазы рассеяния велики ( $\eta \sim RZe^2/a_1 \psi_c \hbar \gg 1$ ), то для вычисления входящего в (39.4) интеграла по прицельным параметрам снова можно воспользоваться методом стационарной фазы. Получаемые при этом выражения для точки стационарной фазы, амплитуды и сечения рассеяния будут определяться формулами (39.8), (39.12) и (39.13) с той лишь разницей, что входящие в эти формулы фаза рассеяния и функция отклонения теперь будут определяться формулами (39.3) и (38.3).

Функция  $\varphi(b)$ , как уже отмечалось, может быть неоднозначной функцией прицельного параметра, т. е. частицы с различными значениями прицельного параметра могут рассеиваться на один и тот же угол  $\varphi$ . Так, рассеяние электронов на цепочке атомов на угол  $\varphi < \varphi_{\max}$  (как показано в предыдущем

параграфе), происходит по двум траекториям, определяемым прицельными параметрами  $b_1$  и  $b_2$ , соответствующими двум корням уравнения  $\varphi = \varphi(b)$ . В этой области углов  $\varphi$  две классические траектории, приводящие к рассеянию электронов на один и тот же угол  $\varphi$ , будут расположены достаточно далеко друг от друга, так что разность фаз  $\Delta\eta = \eta(b_1) - \eta(b_2)$ , соответствующая этим траекториям, будет велика по сравнению с единицей. Подчеркнем, что в этом случае возникают две стационарные точки в интеграле (39.4), и мы должны учитывать вклад в амплитуду, вносимый обеими точками. При этом

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = L\psi \left| \sum_{i=1}^2 f_k(\varphi) \right|^2, \quad (39.14)$$

где  $f_k(\varphi)$  — амплитуды рассеяния, соответствующие однозначным ветвям функции отклонения:

$$f_k(\varphi) = |d\varphi/db|_k^{-1/2} \exp[2i\eta(b_k) - ip_{\perp} b_k \varphi/\hbar].$$

Сечение рассеяния (39.14) из-за интерференции между амплитудами  $f_k(\varphi)$  будет быстро осциллировать с изменением угла  $\varphi$ . Отметим, что после усреднения по этим осцилляциям формула (39.14) переходит в формулу (38.7) классической теории рассеяния.

При  $\varphi \rightarrow \varphi_{\max}$  две классические траектории, приводящие к рассеянию электрона на один и тот же угол  $\varphi$ , сливаются и разность фаз  $\Delta\eta$  при этом стремится к нулю. При вычислении амплитуды рассеяния в этом случае в разложении фазы рассеяния в окрестности прицельного параметра  $b_r$ , соответствующего максимальному углу рассеяния  $\varphi_{\max}$ , требуется сохранить слагаемое, содержащее вторую производную функции отклонения:

$$\eta(b) = \eta(b_r) - \frac{1}{2} p_{\perp} \varphi(b_r)(b - b_r) - \frac{1}{12} p_{\perp} \left| \frac{d^2\varphi}{db^2} \right|_r (b - b_r)^3 + \dots \quad (39.15)$$

При этом сечение рассеяния (39.1) приобретает вид

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = \frac{2L}{EB^{2/3}} \{ \Phi [(\varphi - \varphi_{\max}) B^{-1/3}] \}, \quad (39.16)$$

где  $\Phi(x)$  — функция Эйри (5.5) и  $B = (1/2 p_{\perp}^{-2}) |d^2\varphi/db^2|_r$ .

Формула (39.16) показывает, что при рассеянии электронов на цепочке атомов в области углов  $\varphi \sim \varphi_{\max}$  имеет место явление радужного рассеяния частиц, аналогичное явлениям радужного рассеяния волн и частиц на капельках воды, атомах и атомных ядрах.

Выше на рис. 5.15 штриховой и штрихпунктирной кривыми представлены результаты вычисления сечения рассеяния электронов в поле цепочки атомов (35.18) по формулам (39.14) и (39.16) соответственно.

Полученные результаты показывают, что в области углов  $\varphi < \varphi_{\max}$  осцилляции сечения рассеяния обусловлены интерференцией между амплитудами рассеяния, соответствующими двум классическим траекториям, по которым рассеяние происходит на один и тот же угол  $\varphi$ . При  $\varphi \sim \varphi_{\max}$  имеет место явление радужного рассеяния электронов на цепочке атомов, при котором в области углов  $\varphi \lesssim \varphi_{\max}$  сечение содержит осцилляции, а при  $\varphi > \varphi_{\max}$  сечение быстро убывает с ростом  $\varphi$ .

Аналогичные результаты имеют место и для позитронов при  $\beta > 1$ .

Таким образом, при рассеянии быстрых частиц на цепочке атомов кристалла могут проявляться интерференционные эффекты в рассеянии. Для экспериментального обнаружения этих эффектов требуется, чтобы расходимость падающего пучка  $\Delta\psi$  была мала по сравнению с ширинами максимумов углового распределения вышедших из кристалла частиц  $\Delta\psi < \psi\Delta\varphi$ , где  $\Delta\varphi$  — ширина максимума сечения рассеяния вдоль азимутального угла  $\varphi$ . Из формулы (39.16) вытекает, что  $\Delta\varphi \sim 2(ER\psi)^{-2/3}$ , поэтому условие на  $\Delta\psi$  приобретает вид  $\Delta\psi < 2\psi(ER\psi)^{-2/3}$ . Кроме того, требуется, чтобы толщина кристалла была достаточно мала, так чтобы прошедшая через кристалл частица столкнулась только с одной цепочкой атомов. Для этого требуется, чтобы толщина кристалла  $L$  была мала по сравнению с длиной свободного пробега частицы между последовательными столкновениями с цепочками  $L < \bar{a}^2/R\psi$ . При нарушении этого условия необходим учет многократного рассеяния частиц цепочками атомов.

#### § 40. Регулярное и хаотическое движение надбарьерных частиц в поле цепочек атомов кристалла

В § 37 мы рассмотрели движение быстрого электрона в кристалле в условиях аксиального каналирования и показали, что его движение в канале может быть как регулярным, так и хаотическим. Этот вывод, как мы покажем, относится не только к каналированным, но и к надбарьерным частицам. Различие между двумя типами движения надбарьерных частиц заключается в следующем.

При надбарьерном движении частица сталкивается с цепочками атомов, расположенными параллельно оси  $z$ , вблизи которой происходит движение. Между последовательными столкновениями может существовать корреляция и может ее не быть. При наличии корреляции изменение прицельного параметра между последующими столкновениями частиц с цепочками атомов мало по сравнению с прицельным параметром, так что траектория будет плавно изменяться с глубиной проникновения частицы в кристалл. Этот случай соответствует регулярному движению.

Отсутствие корреляций означает, что изменение прицельного параметра сравнимо с величиной самого параметра. Этот

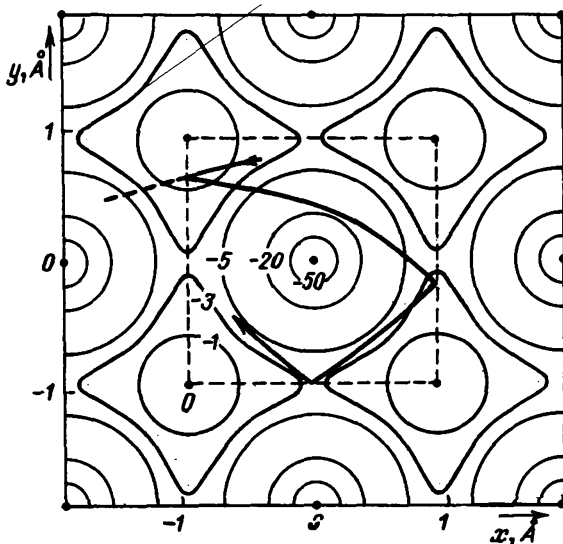


Рис. 5.16. Движение надбарьерной частицы в «бильярде», образованном цепочками атомов кристалла кремния в плоскости, ортогональной оси  $\langle 100 \rangle$

случай соответствует нерегулярному, хаотическому движению частицы в кристалле. При этом ее столкновения с разными цепочками атомов могут рассматриваться как случайные.

Характер движения надбарьерной частицы может быть определен на основе метода сечений Пуанкаре так же, как это было сделано в случае аксиального каналирования электронов, с той лишь разницей, что траектория частицы при пересечении края элементарной ячейки в плоскости  $(x, y)$ , ортогональной оси  $z$ , должна быть заменена зеркально отраженной траекторией [18, 31]. Задача изучения движения частицы в кристалле при этом оказывается тесно связанной с соответствующей задачей о движении заряженной частицы в «бильярде», помещенном во внешнее поле [12, 32].

Рассмотрим в качестве примера движение ультрарелятивистских позитронов и электронов в кристалле кремния под малым углом к оси  $\langle 100 \rangle$ . Элементарная ячейка в плоскости, ортогональной оси  $\langle 100 \rangle$ , в этом случае является простейшей — она квадратная. На рис. 5.16 представлены эквипотенциальные поверхности потенциальной энергии  $U(x, y)$  в этом случае. В качестве потенциала отдельного атома решетки в вычислениях использован потенциал Мольер (35.12). Температура кристалла предполагается комнатной.

Сечения Пуанкаре могут быть получены путем численного решения уравнения (35.7). С этой целью рассмотрим траекторию частицы в фазовом пространстве  $(x, \dot{x}, y, \dot{y})$ , соответствующую фиксированному значению энергии поперечного движения  $\varepsilon_{\perp}$ , и определим точки пересечения этой траектории

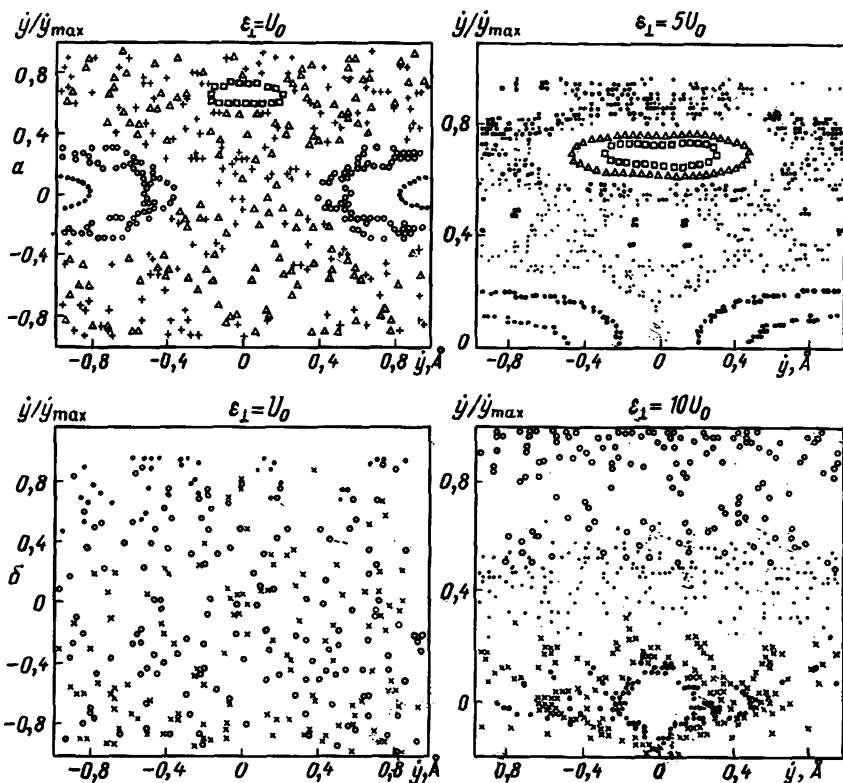


Рис. 5.17. Сечения Пуанкаре при надбарьерном движении позитронов (а) и электронов (б) в кристалле кремния вдоль оси  $\langle 100 \rangle$

с некоторой плоскостью, например плоскостью  $(y, \dot{y})$ , проходящей через край ячейки. Результаты\*) вычислений сечений Пуанкаре для позитронов, соответствующие различным значениям  $\epsilon_{\perp}$ , представлены на рис. 5.17. Различные значки соответствуют различным начальным условиям. В вычислениях использована аппроксимация непрерывного потенциала цепочки атомов в пределах элементарной ячейки функцией вида (35.7).

Полученные результаты показывают, что в зависимости от начальных условий наряду с регулярным возможно хаотическое движение надбарьерных частиц в кристалле, причем характер движения этих частиц существенно зависит от знака их заряда. Так, для надбарьерных электронов явление динамического хаоса имеет место практически для всех начальных условий в гораздо большем интервале значений  $\epsilon_{\perp}$ , чем для позитронов. Связано это с тем, что электроны при всех значениях  $\epsilon_{\perp}$  имеют возможность подходить на близкие

\*) Аналогичные результаты были получены в работах [33, 36] при изучении движения в кристалле положительно заряженных ионов.



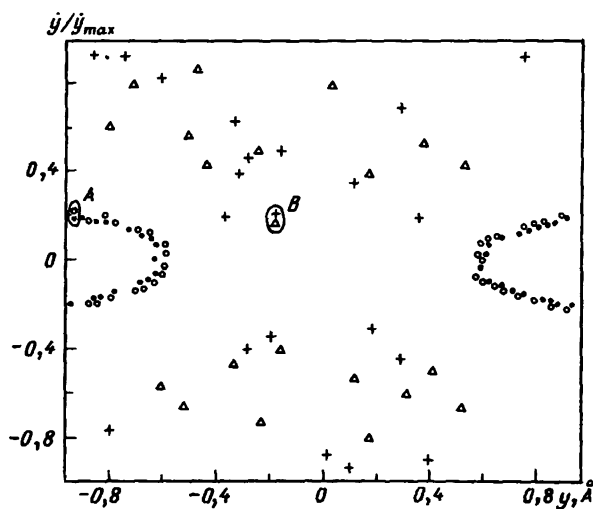


Рис. 5.18. Сечения Пуанкаре для близких траекторий в регулярной (А) и хаотической (В) областях

расстояния к оси цепочек, где градиенты потенциала цепочки максимальны. В результате этого для электронов имеет место большой разброс прицельных параметров между последовательными столкновениями с цепочками атомов, чем для позитронов, что в свою очередь ведет к большей стохастизации движения в кристалле электронов в сравнении с позитронами.

Приведенные сечения Пуанкаре показывают, что для позитронов регулярное движение возможно уже при  $\epsilon_{\perp} \lesssim U_0$ . Этому движению соответствует прохождение частицы вдоль кристаллографической плоскости (в данном случае — вдоль плоскости (100)). Существенным является то, что на периоде одного колебания позитрона в этой плоскости он сталкивается с небольшим (порядка 6) числом цепочек атомов и тем не менее его движение вдоль плоскости является регулярным. С ростом  $\epsilon_{\perp}$  устойчивое движение позитрона оказывается возможным и в других плоскостях.

Для надбарьерных электронов возможность регулярного движения вдоль кристаллографических плоскостей появляется только при довольно больших значениях  $\epsilon_{\perp}$  ( $\epsilon_{\perp} \gtrsim 10U_0$ ).

Рассмотрим теперь поведение траекторий надбарьерных позитронов в фазовом пространстве при малом изменении начальных условий. На рис. 5.18 даны сечения Пуанкаре для траекторий в двух случаях, когда траектории начинаются в области регулярного движения (случай А) и в области хаотического движения (случай В). На рис. 5.19 изображено расстояние между первоначально близкими траекториями вдоль оси  $y$  в зависимости от числа пройденных частицей ячеек.

Приведенные результаты показывают, что при малом изменении начальных условий кривые в случае *A* мало расходятся, а в случае *B* сильно расходятся между собой.

Таким образом, регулярное движение является устойчивым по отношению к малым изменениям начальных условий, тогда как при хаотическом движении первоначально близкие траектории быстро расходятся между собой.

Заметим, что при построении сечений Пуанкаре мы считали потенциал цепочки в пределах элементарной ячейки цилиндрически-симметричным. В таком поле, как уже отмечалось, кроме  $\varepsilon_{\perp}$  сохраняется момент количества движения  $M$ , т. е. существуют два интеграла движения, но тем не менее и в этом случае речь может идти о хаотическом движении надбарьерной частицы. Дело в том, что момент сохраняется в пределах каждой ячейки, но при переходе от одной ячейки к другой этот интеграл движения разрушается.

Покажем теперь, что соотношение между прицельным параметром  $b$  и его изменением  $\Delta b$  при последовательных соударениях с цепочками атомов зависит от энергии частицы и от ориентации кристаллографических осей относительно падающего пучка.

Предварительно напомним, что приближение непрерывных цепочек, когда последние выступают как объекты, на которых происходит рассеяние, имеет смысл только в том случае, когда достаточно мал угол между импульсом частицы и осью цепочки  $\psi \ll R/a_1$ . Это неравенство мы считаем выполненным.

В поле непрерывного потенциала отдельной цепочки атомов (потенциала вида нити), как показано в § 38, рассеяние возможно только вдоль азимутального угла  $\varphi$  в плоскости, ортогональной оси цепочки. Этот угол определяется, согласно (38.3), поперечной энергией  $\varepsilon_{\perp} = 1/2 E \psi^2$  и прицельным параметром цепочки  $b$ . Вследствие рассеяния на различных цепочках происходит перераспределение частиц по углам  $\varphi$  (см. рис. 5.20). Ясно, что корреляции между столкновениями частицы с цепочками атомов могут проявляться, если она движется вблизи

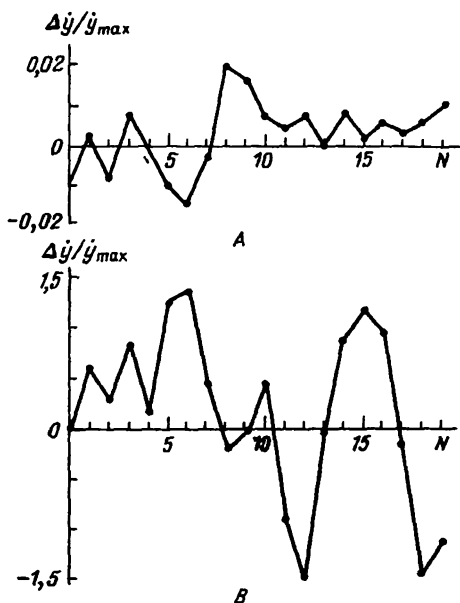


Рис. 5.19. Расстояние между первоначально близкими траекториями вдоль оси  $y$  в зависимости от числа пройденных частицей ячеек: *A*—регулярное; *B*—хаотическое движение

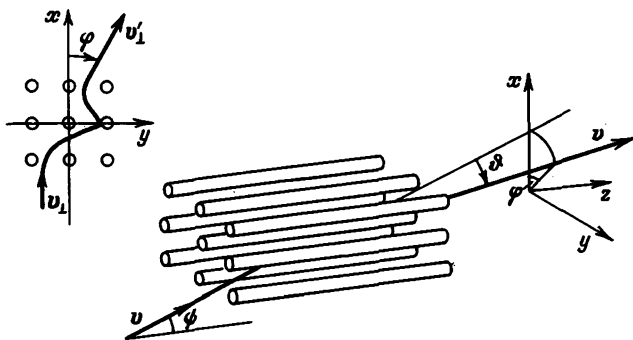


Рис. 5.20. Многократное рассеяние быстрой частицы на цепочках атомов кристалла

одной из кристаллических плоскостей, в которой периодически расположены цепочки. Обозначим через  $\alpha$  угол между импульсом частицы и этой плоскостью (рис. 5.21). Тогда изменение прицельного параметра будет, очевидно, определяться соотношением

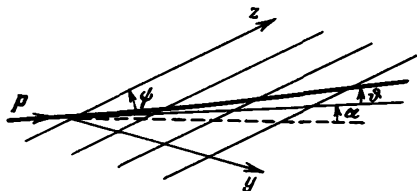


Рис. 5.21. Углы  $\psi$  и  $\alpha$ , определяющие ориентацию кристаллических осей относительно импульса частицы

$$\Delta b \sim \frac{a_2}{\psi} \max(\alpha, \vartheta), \quad (40.1)$$

где  $a_2$  — расстояние между цепочками в плоскости  $(y, z)$ .

Мы интересуемся случаем, когда  $\Delta b \ll b$ . Это условие будет иметь место только если  $\alpha \ll b\psi/a_2$  и  $|\varphi| \ll 1$ . Последнее неравенство выполняется либо если  $\epsilon_{\perp} \gg U_0$ , либо если  $b \gg R$ . В обоих этих случаях функция  $\varphi(b)$  определяется соотношением (38.4) и, следовательно, для  $\varphi(b)$  справедлива следующая оценка:

Мы интересуемся случаем, когда  $\Delta b \ll b$ . Это условие будет иметь место только если  $\alpha \ll b\psi/a_2$  и  $|\varphi| \ll 1$ . Последнее неравенство выполняется либо если  $\epsilon_{\perp} \gg U_0$ , либо если  $b \gg R$ . В обоих этих случаях функция  $\varphi(b)$  определяется соотношением (38.4) и, следовательно, для  $\varphi(b)$  справедлива следующая оценка:

$$|\varphi(b)| \sim \frac{2U_0}{E\psi^2} \frac{R}{b} \sim \frac{\psi_c^2}{\psi^2} \frac{R}{b}.$$

Так как при малых значениях азимутальных углов рассеяния  $\vartheta \sim \psi\varphi$ , то неравенство  $\Delta b \ll b$  будет справедливо при условиях

$$\alpha \ll \psi \frac{b}{a_2}, \quad \psi_c^2 \frac{Ra}{b^2} \ll \psi^2. \quad (40.2)$$

Электроны при всех значениях углов  $\psi$  могут подходить на близкие расстояния к оси цепочки, поэтому для электронов характерные значения прицельных параметров составляют  $b \sim R$ . Неравенства (40.2) в этом случае приобретают вид

$$\alpha \ll \psi \frac{R}{a_2}, \quad \psi_c \sqrt{\frac{a}{R}} \ll \psi. \quad (40.3)$$

Позитроны при малых значениях угла  $\alpha$  не могут подходить на близкие расстояния к оси цепочки. Характерные значения прицельных параметров в этом случае порядка половины расстояния между плоскостями  $b \sim a_3/2$ . Подставляя это значение  $b$  в неравенства (40.2), приходим к следующим ограничениям на углы  $\alpha$  и  $\psi$ , при которых выполняется условие  $\Delta b \ll b$ :

$$\alpha \ll 2\psi \frac{R}{a_2}, \quad \psi_c \frac{\sqrt{4Ra_2}}{a_3} \ll \psi. \quad (40.4)$$

При выполнении неравенств (40.3) и (40.4) траектория частицы будет плавно изменяться при последовательных столкновениях с цепочками атомов в плоскости. Траектория в этом случае будет определяться непрерывным потенциалом плоскости, вблизи которой происходит движение,

$$\ddot{x} = -\frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial x} U_p(x), \quad U_p(x) = \frac{1}{L_y} \int_{-\infty}^{+\infty} dy U(\rho), \quad (40.5)$$

где  $x$  — координата, ортогональная плоскости  $(y, z)$ ,  $L_y$  — линейный размер кристалла вдоль оси  $y$  и  $U(\rho)$  — потенциальная энергия, определяемая формулой (35.3).

Таким образом, мы пришли к одномерной задаче о движении частицы в поле  $U_p(x)$ . Ясно, что движение в таком поле будет регулярным. Интегралом движения в этом случае, дополнительным к интегралу энергии поперечного движения  $\varepsilon_{\perp} = 1/2 E \psi^2$ , является интеграл энергии поперечного движения  $\varepsilon_{\perp p}$  по отношению к рассматриваемым плоскостям, определяемый соотношением

$$\varepsilon_{\perp p} = 1/2 E \dot{x}^2 + U_p(x). \quad (40.6)$$

Обратим внимание на то, что для позитронов условия применимости формулы (40.5) могут быть выполнены даже при  $\psi < \psi_c$ , тогда как для электронов устойчивое движение частиц вдоль плоскости возможно только при  $\psi \gtrsim \sqrt{a/R} \psi_c \sim 3\psi_c$ . Эти простые аналитические оценки согласуются с результатами изложенного выше анализа характера движения частиц в кристалле на основе метода сечения Пуанкаре.

Если хотя бы одно из условий (40.2) нарушается, то при последовательных столкновениях частицы с цепочками атомов будет происходить значительный разброс прицельных параметров  $\Delta b \gtrsim b$ . Столкновения частицы с разными цепочками в этом случае можно рассматривать как случайные. Действительно, большой разброс прицельных параметров при последовательных столкновениях соответствует, очевидно, картине хаотического распределения цепочек атомов — цепочки остаются параллельными друг другу и пронизывают весь кристалл, но расстояние между ними и их взаимное

расположение в плоскости  $(x, y)$  является как бы случайным. Иными словами, в этом случае можно исходить из картины, в которой столкновения частицы происходят с нерегулярно расположенными, но тем не менее параллельными друг другу цепочками.

Движение частицы по отношению к цепочкам атомов, как мы видим, может носить как регулярный, так и хаотический характер, причем какая из этих возможностей осуществляется, зависит от углов падения частицы по отношению к кристаллографическим осям и плоскостям и, вообще говоря, от начальных условий.

Обратим внимание на то, что для нахождения сечения Пуанкаре необходимо знать траекторию частицы, поэтому может сложиться впечатление, что определение характера движения частицы не представляет интереса. В действительности, однако, это не так, поскольку выяснение характера движения частицы и определение областей в фазовом пространстве, соответствующих регулярному и хаотическому движению, позволяет существенно упростить описание многих физических процессов, связанных с этими областями. Так, в случае регулярного движения частицы вдоль кристаллической плоскости, как показано выше, можно пользоваться приближением непрерывной плоскости; в случае же хаотического движения применимы методы статистической физики.

#### § 41. Многократное рассеяние на цепочках атомов

Многократное рассеяние обычно связывается со стохастичностью и поэтому может показаться, что ему нет места при прохождении частиц через кристалл, представляющий собой регулярную структуру. В действительности, как мы видели, стохастичность может возникнуть и при движении частицы в кристалле. Связано это с тем, что в случае динамического хаоса столкновения надбарьерной частицы с различными цепочками атомов можно рассматривать как случайный процесс. При этом элементарным объектом, определяющим взаимодействие частицы с кристаллом, выступает ее взаимодействие с отдельной цепочкой атомов, тогда как взаимодействие с различными цепочками может быть рассмотрено методами статистической физики.

Обозначим через  $f(\varphi, z)$  функцию распределения частиц в кристалле по азимутальному углу  $\varphi$  на глубине  $z$ . Эта функция меняется вследствие рассеяния частиц на цепочках атомов согласно следующему кинетическому уравнению:

$$\frac{d}{dz} f(\varphi, z) = na_1 \psi \int_{-\infty}^{+\infty} db [f(\varphi + \varphi(b), z) - f(\varphi, z)]. \quad (41.1)$$

Функция  $f(\varphi, z)$  нормирована условием

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi f(\varphi, z) = 1.$$

Уравнение (41.1) было введено в работах [6, 34] для описания рассеяния положительно заряженных частиц в кристалле при  $\psi < \psi_c$ . В работах [9, 28, 35] показано, что для релятивистских частиц это уравнение остается в силе и при  $\psi > \psi_c$ .

При написании уравнения (41.1) мы исходим из картины динамического хаоса, причем речь идет о динамическом хаосе во всем фазовом пространстве. Это означает, что в сечениях Пуанкаре объем областей, соответствующих регулярному движению, должен быть мал по сравнению с объемом области, соответствующей динамическому хаосу. Только в этом случае можно пользоваться уравнением (41.1). Этот вывод подтверждается при использовании численного метода расчета прохождения частиц через кристалл (см. § 56).

Решение уравнения (41.1), удовлетворяющее условию  $f(\varphi, 0) = \delta(\varphi)$ , где  $\delta(\varphi)$  — дельта-функция, имеет вид

$$f(\varphi, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\cos k\varphi) \exp \left[ -na_1 \psi z \int_{-\infty}^{+\infty} db (1 - \cos k\varphi(b)) \right]. \quad (41.2)$$

Важной величиной, характеризующей рассеяние частиц в кристалле, является средний квадрат угла рассеяния частиц

$$\overline{\vartheta^2} = 4\psi^2 \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi f(\varphi, z) \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (41.3)$$

Используя (41.2), имеем

$$\overline{\vartheta^2} = 2\psi^2 \left\{ 1 - \exp \left[ -2na_1 \psi L \int_{-\infty}^{+\infty} db \left( \sin \frac{1}{2} \varphi(b) \right)^2 \right] \right\}. \quad (41.4)$$

Рассмотрим некоторые предельные случаи формул (41.2) и (41.4).

При больших значениях углов  $\psi$  ( $\psi \gg \psi_c$ ) характерные значения углов рассеяния частицы на отдельной цепочке атомов малы. При этом, если

$$\overline{\vartheta^2} = 2na_1 L \psi \int_0^{\infty} db \varphi^2(b) \ll 1, \quad (41.5)$$

где  $\overline{f(b)}$  определяется формулой (38.4), то в области углов  $\varphi \lesssim \sqrt{\overline{\varphi^2}}$  сумму в (41.2) можно заменить на интеграл. В этом случае распределение частиц по углам  $\varphi$  будет гауссовым:

$$f(\varphi, L) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\varphi^2}}} \exp\left(-\frac{\varphi^2}{2\overline{\varphi^2}}\right). \quad (41.6)$$

При этом

$$\overline{\vartheta^2}(L) = \overline{\psi^2 \overline{\varphi^2}} = 8nLa_1 E^{-2} \psi^{-1} \int_0^\infty db \left( \frac{d}{db} \int_0^\infty dx U_r(\rho) \right)^2. \quad (41.7)$$

В частности, для непрерывного потенциала Линдхарда (35.16)

$$\overline{\vartheta^2}(L) = \sqrt{3} (4 - \pi) 4\pi^2 Z^2 e^4 \frac{nRL}{E^2 a_1 \psi}. \quad (41.8)$$

Сравнивая это значение  $\overline{\vartheta^2}$  со средним квадратом угла рассеяния частиц в аморфной среде (20.11), находим, что

$$\frac{\overline{\vartheta^2}}{\overline{\vartheta_a^2}} \sim \frac{R}{4a_1 \psi}. \quad (41.9)$$

Таким образом, в рассматриваемой области углов  $\psi$  ( $\psi \gg \psi_c$ ) средний квадрат угла рассеяния частиц в кристалле значительно превосходит средний квадрат угла рассеяния частиц в аморфной среде. Множитель  $R/4a_1 \psi$  представляет собой по порядку величины число атомов из отдельной цепочки атомов кристалла, с которыми эффективно взаимодействует частица.

При больших толщинах  $L$ , а именно, при выполнении условия  $na_1 \psi L \int_0^\infty db \varphi^2(b) \gg 1$  согласно (41.2) распределение частиц по углу  $\varphi$  становится равномерным:

$$f(\varphi, L) = 1/2\pi. \quad (41.10)$$

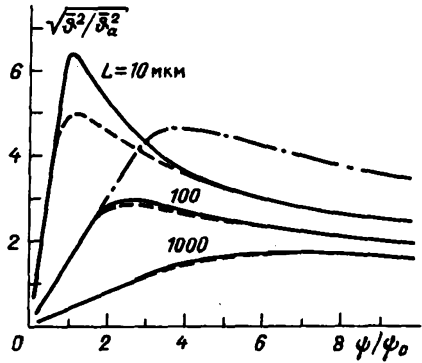
Величина  $\overline{\vartheta^2}$  в этом случае определяется только значением угла  $\psi$

$$\overline{\vartheta^2}(L) \approx 2\psi^2. \quad (41.11)$$

При  $\psi \sim \psi_c$  и конечных толщинах кристалла вычисление функции распределения и среднего квадрата угла рассеяния может быть проведено только численными методами.

На рис. 5.22 представлены результаты вычисления функции  $\overline{\vartheta^2}(L, \psi)$  при различных значениях угла  $\psi$  и разных толщинах кристалла. Вычисления проводились для позитронов (сплошные линии) и для электронов (штриховые линии) с  $E = 1$  ГэВ,

Рис. 5.22. Ориентационная зависимость среднего значения квадрата угла рассеяния позитронов и электронов с энергией  $E=1$  ГэВ, движущихся в кристаллах кремния различной толщины вблизи оси  $\langle 111 \rangle$



движущихся в кристаллах кремния с  $L=10$ ; 100 и 1000 мкм вблизи оси  $\langle 111 \rangle$ . Вычисления проводились для потенциала цепочки (35.18) при  $T=293$  К. Штрихпунктирная кривая соответствует результатам вычисления среднего значения квадрата угла рассеяния позитронов в кристалле кремния с  $L=100$  мкм в случае, когда потенциал цепочки представляет собой потенциал Линдхарда.

Полученные результаты показывают, что  $\overline{\vartheta^2}$  зависит от знака заряда частицы, толщины кристалла и соотношения между  $\psi$  и  $\psi_c$ . Максимум  $\overline{\vartheta^2}$  достигается при  $\psi \sim \psi_c$ . В этой области углов  $\psi$  средний квадрат угла рассеяния кристаллом позитронов больше среднего квадрата угла рассеяния электронов. Различие в рассеянии частиц с разными знаками заряда обусловлено различием в рассеянии этих частиц на отдельной цепочке атомов при малых прицельных параметрах. При  $\psi \gg \psi_c$  и  $\psi \ll \psi_c$  в соответствии с (41.7) и (41.11) различие в многократном рассеянии электронов и позитронов исчезает.

Приведенные графики показывают также, что с ростом температуры кристалла (потенциал Линдхарда соответствует  $u^2=0$ ) средний квадрат угла рассеяния частиц кристаллом уменьшается. При этом, однако, в широком интервале углов  $\psi$  по-прежнему выполняется условие  $\overline{\vartheta^2} \gg \vartheta_a^2$ .

Рассмотрим теперь многократное рассеяние в случае, когда потенциал цепочки аппроксимируется функцией  $U_1(\rho) = U_0(R/\rho)$ . В поле с таким распределением потенциала интегрирование в формулах (41.2) и (41.4) может быть выполнено аналитически. При этом функция распределения частиц по углам имеет вид [6, 34]

$$f(\varphi, L) = \frac{1}{2\pi} \frac{\text{sh } B}{\text{ch } B - \cos \varphi}, \quad B = \pi a_1 n L \psi R \beta^{-2}, \quad (41.12)$$

а средний квадрат угла рассеяния равен

$$\overline{\vartheta^2} = 2\psi^2 \{1 - \exp(-\pi a_1 R \psi L \beta^{-2})\}. \quad (41.13)$$



Эти формулы показывают, что в отличие от потенциала Линдхарда в поле вида  $U_1(\rho)$  величина  $\bar{\mathfrak{F}}^2$  не зависит от знака заряда частицы и монотонно растет с увеличением  $\psi$ . Таким образом, при  $\psi > \psi_c$  потенциал  $U_1(\rho)$  дает совершенно неправильную картину в рассеянии частиц цепочками атомов, что обусловлено более сингулярным характером функции  $U_1(\rho)$  при  $\rho \rightarrow 0$ , чем функции  $U_L(\rho)$ .

Полученные результаты справедливы, если сохраняется энергия поперечного движения. Для этого необходимо, чтобы средний квадрат угла рассеяния частицы на различных несовершенствах решетки был мал по сравнению с  $\psi^2$ .

## ИЗЛУЧЕНИЕ ФОТОНОВ ЗАРЯЖЕННЫМИ ЧАСТИЦАМИ В ПОЛЕ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛОСКОСТЕЙ

### § 42. Движение заряженных частиц в поле непрерывного потенциала кристаллических плоскостей

Мы перейдем теперь к рассмотрению излучения при движении релятивистских электронов и позитронов вблизи кристаллической плоскости и оси, предполагая, что излучение может описываться классической электродинамикой. Для этого необходимо, в частности, чтобы энергия фотона была значительно меньше энергии электрона  $\hbar\omega \ll E$  и чтобы выполнялось условие  $N_c Ze^2/\hbar v \gg 1$ , где  $N_c$  — число атомов на длине когерентности. Кроме того, должно быть велико число квантовых уровней в поле кристаллических плоскостей, играющих роль в рассматриваемой задаче.

Начнем с изучения движения частицы вблизи кристаллической плоскости. Мы будем интересоваться излучением в области частот, для которой длина когерентности  $l_c$  больше или порядка длины  $2R/\theta$ , на которой частица эффективно взаимодействует с атомами кристаллической плоскости ( $\theta$  — угол между импульсом падающей частицы и кристаллической плоскостью,  $R$  — радиус экранировки потенциала атома).

В борновском приближении, как мы видели, в этом случае действие кристаллической плоскости со многими дискретно расположенными атомами эквивалентно действию плоскости с непрерывно распределенными атомами. Иными словами, в этом случае кристаллический потенциал можно заменить усредненным потенциалом, определяемым формулой (30.2). Потенциальную энергию  $U(x)$  можно представить в виде

$$U(x) = \sum_n U_p(x - x_n), \quad U_p(x) = \frac{1}{a_1 a_2} \int dz dy u(r), \quad (42.1)$$

где  $U_p(x)$  — усредненная потенциальная энергия взаимодействия электрона с кристаллической плоскостью,  $a_1$  и  $a_2$  — средние расстояния между атомами вдоль осей  $z$  и  $y$ ,  $x_n$  — координаты точки пересечения оси  $x$  с  $n$ -й плоскостью. Такой же заменой можно пользоваться и при классическом рассмотрении излучения релятивистских частиц. Это связано с тем, что в релятивистском случае, когда  $l_c \gtrsim 2R/\theta$ , частица в пределах длины когерентности будет взаимодействовать с большим числом атомов кристаллической плоскости. Так как излучение формируется на длине порядка  $l_c$  и при малых  $\theta$  изменение

прицельного параметра между последовательными соударениями частицы с атомами плоскости, находящимися в пределах длины  $l_c$ , будет мало, то для излучения не существенна неоднородность распределения потенциала в плоскости.

Подставляя потенциальную энергию  $U(x)$  в уравнение (35.1) и учитывая, что в поле (42.1) сохраняется составляющая импульса частицы  $p_{\parallel}$ , параллельная плоскости  $(y, z)$ , приходим к следующему уравнению для траектории вдоль оси  $x$ :

$$\ddot{x} = -\frac{1}{E_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial x} U(x), \quad E_{\parallel} = \sqrt{p_{\parallel}^2 + m^2}. \quad (42.2)$$

Из этого уравнения следует, что в поле  $U(x)$  сохраняется энергия поперечного движения

$$\varepsilon_{\perp}(x_0) = \frac{1}{2} E_{\parallel} \dot{x}^2 + U(x), \quad \varepsilon_{\perp}(x_0) = \frac{1}{2} E_{\parallel} \theta^2 + U(x_0), \quad (42.3)$$

где  $x_0$  — координаты точки влета частицы в кристалл.

Формулы (42.2) и (42.3) показывают, что скорость и ускорение частицы в периодическом поле  $U(x)$  будут периодическими функциями времени.

Из (42.3) легко найти траекторию частицы:

$$t = \sqrt{E_{\parallel}/2} \int_{x_0}^x dx' (\varepsilon_{\perp}(x_0) - U(x'))^{-1/2}, \quad (42.4)$$

где интегрирование ведется вдоль пути, проходимого частицей в кристалле вдоль оси  $x$ .

При  $\varepsilon_{\perp}(x_0) > U_{\max}$ , где  $U_{\max}$  — максимальное значение потенциальной энергии  $U(x)$  (для электронов  $U_{\max} = 0$ , для позитронов  $U_{\max} = |U(x)|_{\max}$ ), энергия поперечного движения больше высоты потенциального барьера. Движение в этом случае вдоль оси  $x$  будет инфинитным. Частица, движущаяся в этих условиях, носит название надбарьерной. Период колебания скорости и ускорения такой частицы, очевидно, равен

$$T_u = \int_0^d \frac{dx}{|\dot{x}|}, \quad \dot{x} = \sqrt{\frac{2}{E_{\parallel}} [\varepsilon_{\perp}(x_0) - U(x)]}, \quad (42.5)$$

где  $d$  — расстояние между плоскостями.

Если  $\varepsilon_{\perp}(x_0) < U_{\max}$ , то движение частицы в направлении, перпендикулярном плоскости, будет финитным. Частица, совершающая такое движение в кристалле, носит название каналированной. Период колебания каналированной частицы равен

$$T_c = 4 \int_0^{d/2} \frac{dx}{|\dot{x}|} \Theta(\varepsilon_{\perp}(x_0) - U(x)), \quad (42.6)$$

где  $\Theta(\xi)$  — ступенчатая функция Хевисайда (2.9).

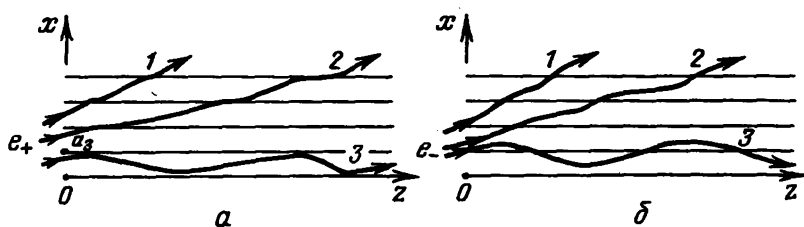


Рис. 6.1. Типичные траектории надбарьерных и каналированных позитронов (а) и электронов (б) в поле непрерывного потенциала кристаллических плоскостей (1 соответствует случаю  $\theta \gg \theta_c$ ; 2 —  $\theta \gtrsim \theta_c$ ; 3 —  $\theta < \theta_c$ )

Мы видим, что необходимым условием каналирования является выполнение неравенства

$$\theta < \theta_c, \quad (42.7)$$

где  $\theta_c = \sqrt{2U_{\max}/E_{\parallel}}$  — критический угол плоскостного каналирования [1, 2].

При  $\theta > \theta_c$  движение будет надбарьерным для всех падающих на кристалл частиц. Типичные траектории надбарьерных и каналированных частиц при различных соотношениях между углами  $\theta$  и  $\theta_c$  представлены на рис. 6.1.

Скорость и ускорение частицы в поле  $U(x)$ , как мы видели, являются периодическими функциями времени. Если  $T$  — период колебания этих величин, то радиус-вектор траектории  $\mathbf{r}(t)$  на периоде одного колебания будет изменяться по закону

$$\mathbf{r}(t+T) = \mathbf{v}_{\parallel} T + \mathbf{r}(t), \quad (42.8)$$

где  $\mathbf{v}_{\parallel}$  — скорость поступательного движения частицы. Таким образом, быстрая частица при движении в поле (42.1) совершает периодические колебания в плоскости, ортогональной  $\mathbf{v}_{\parallel}$ , и за время одного колебания в этой плоскости она смещается вдоль вектора  $\mathbf{v}$  на расстояние  $\mathbf{v}_{\parallel} T$ . Иными словами, в рассматриваемом случае реализуется ондуляторный режим движения (см. § 6).

В § 6 были получены формулы, описывающие излучение частицы в ондуляторе. Ясно, что этими формулами можно пользоваться и в случае движения частицы в поле непрерывного потенциала кристаллических плоскостей (42.1). Принципиальное различие между излучением в кристалле и в ондуляторе при этом будет заключаться в том, что в ондуляторе излучение всех частиц происходит одинаково, в кристалле же следует различать излучения каналированных и надбарьерных частиц<sup>\*)</sup>. Траектории и периоды колебаний каналированных и над-

<sup>\*)</sup> Излучение при каналировании впервые было рассмотрено в работе [3], излучение при надбарьерном движении — в работе [4].

барьерных частиц различны, поэтому будут различны и спектральные распределения их излучения. Отметим также, что при прохождении через кристалл пучка частиц могут быть созданы условия, когда часть частиц падающего пучка будет двигаться в условиях каналирования и часть — в условиях надбарьерного движения. Такая ситуация имеет место, если пучок падает на кристалл под углом  $\theta$ , меньшим критического угла плоскостного каналирования  $\theta_c$ . При этом в зависимости от точки влета частицы в кристалл  $x_0$  ее движение вдоль оси  $x$  может быть как финитным, так и инфинитным. В этом случае необходимо учитывать вклад в излучение обеих групп частиц.

Формула (42.4) показывает, что траектория частицы в поле непрерывного потенциала кристаллических плоскостей зависит от  $x_0$ . От  $x_0$ , очевидно, будет зависеть и спектральная плотность излучения  $d\mathcal{E}(x_0)/d\omega$  движущейся в кристалле частицы, поэтому величину  $d\mathcal{E}(x_0)/d\omega$  необходимо усреднить по  $x_0$ . Считая распределение частиц по  $x_0$  на входе в кристалл равномерным, имеем

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{1}{d} \int_0^d dx_0 \frac{d\mathcal{E}(x_0)}{d\omega}, \quad (42.9)$$

где  $d$  — расстояние между плоскостями.

### § 43. Излучение при углах влета, превосходящих критический угол плоскостного каналирования

Рассмотрим вначале излучение при движении частиц в кристалле под углом  $\theta$  к кристаллическим плоскостям, значительно превосходящим критический угол плоскостного каналирования  $\theta_c$ . Энергия поперечного движения  $\varepsilon_{\perp} = 1/2 E \theta^2$  в этом случае велика по сравнению с глубиной потенциальной ямы непрерывного потенциала кристаллических плоскостей, поэтому при нахождении траектории вдоль оси  $x$  может быть выполнено разложение в (42.4) по параметру  $U/\varepsilon_{\perp}$ . В первом приближении такого разложения находим, что траектория частицы вдоль оси  $x$  близка к прямолинейной:

$$x(t) \approx x_0 + \theta tv. \quad (43.1)$$

При этом интервал времени, на котором скорость и ускорение периодически повторяются, равен

$$T_u = d/\theta v. \quad (43.2)$$

Покажем теперь, что при  $\theta \gg \theta_c$  в широком интервале энергий  $E$  выполняется условие дипольности излучения  $\gamma^2 \mathcal{D}_l^2 \ll 1$ , где  $\mathcal{D}_l$  — угол рассеяния на длине когерентности (см.

§ 5). Определим с этой целью максимальное значение изменения скорости частицы на периоде колебания. Согласно (42.3), это изменение скорости равно

$$\delta\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{E}\varepsilon_{\perp}} - \sqrt{\frac{2}{E}(\varepsilon_{\perp} - |U|_{\max})} \approx \frac{1}{2}\theta \frac{|U|_{\max}}{\varepsilon_{\perp}}.$$

Учитывая соотношение  $\theta_c = \sqrt{2|U|_{\max}/E}$ , запишем  $\delta\dot{x}$  в виде

$$\delta\dot{x} = \frac{1}{2} \frac{\theta_c^2}{\theta^2} \theta. \quad (43.3)$$

Подставляя это выражение для  $\delta\dot{x}$  в неравенство  $\gamma^2 \vartheta_l^2 \ll 1$ , приходим к следующему ограничению на угол  $\theta$ , при котором можно пользоваться дипольным приближением для описания излучения,

$$\theta \gg |U|_{\max}/E. \quad (43.4)$$

Мы интересуемся случаем  $\theta \gg \theta_c$ , поэтому только в области энергий

$$E \gg 4m^2/|U|_{\max} \quad (43.5)$$

могут оказаться существенными эффекты, связанные с недипольностью излучения. При движении частиц в кристалле кремния, например, вблизи плоскости (110) величина  $|U|_{\max} = 22$  эВ. Неравенство (43.5) в этом случае приобретает вид  $E \gg 50$  ГэВ. Таким образом, в широком интервале энергий излучение частиц в поле непрерывного потенциала кристаллических плоскостей при  $\theta \gg \theta_c$  может быть рассмотрено в рамках дипольного приближения.

Спектральная плотность излучения в дипольном приближении, согласно (6.6), определяется фурье-компонентой ускорения

$$\frac{d\mathcal{E}_D}{d\omega} = N \frac{e^2 \omega}{T} \sum_{\nu \geq \delta} \frac{1}{\nu^2} \left[ 1 - 2 \frac{\delta}{\nu} \left( 1 - \frac{\delta}{\nu} \right) \right] |W_x(\nu)|^2, \quad (43.6)$$

$$W_x(\nu) = \int_0^T dt \ddot{x}(t) \exp(i\nu t).$$

В интересующем нас случае  $\theta \gg \theta_c$  в (43.6) может быть выполнено разложение по потенциалу. Сохранив только первый член разложения, приходим к следующему выражению для спектральной плотности излучения [4]:

$$\frac{d\mathcal{E}_D}{d\omega} = L \frac{2e^2 \delta}{3m^2 \theta^2 d^2} \sum_{g \geq \delta/\theta} \left[ 1 - \frac{2\delta}{\theta g} \left( 1 - \frac{\delta}{\theta g} \right) \right] |U_g|^2 \left( 1 + O\left(\frac{\theta_c^2}{\theta^2}\right) \right), \quad (43.7)$$

где  $g = 2\pi n/d$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) и  $U_g$  — фурье-компонента потенциальной энергии:

$$U_g = \int_0^d dx U(x) e^{igx}. \quad (43.8)$$

Легко видеть, что формула (43.7), полученная в рамках классической электродинамики, приводит к тому же результату, что и формула (31.9), полученная по теории возмущений квантовой электродинамики с учетом вклада в излучение второго борновского приближения. Действительно, замечая, что  $d\mathcal{E}/d\omega = L n \omega (d\sigma/d\omega)$  и  $U_g = n du_g$ , где  $u_g$  — фурье-компоненты потенциальной энергии взаимодействия частицы с атомом решетки с нулевыми значениями компонент  $g_y$  и  $g_z$  (напомним, что при выводе формулы (31.9) в качестве потенциала отдельного атома использовался экранированный потенциал Кулона), мы придем при  $\hbar\omega \ll E$  к формуле (31.9) для  $d\sigma/d\omega$ .

Подчеркнем, что формулы (43.7) и (31.9) для интенсивности и сечения излучения, полученные на основе классического и квантового рассмотрения процесса излучения частицы в поле кристаллических плоскостей с учетом соотношения  $d\mathcal{E} = L n \omega d\sigma$ , полностью совпадают. Заметим в этой связи, что в эти формулы не входит постоянная Планка  $\hbar$ .

Формула (43.7) становится несправедливой при  $\theta \lesssim \theta_c$ . В этом случае движение частицы уже нельзя считать близким к прямолинейному.

#### § 44. Излучение при каналировании и надбарьерном движении

Рассмотрим теперь, как изменяются спектральные распределения излучения электронов и позитронов с уменьшением значения угла  $\theta$ . В этом случае, как показывает формула (43.4), быстро растут поправки, приводящие к отличию траектории частицы от прямолинейной; растет при этом и различие в излучении электронов и позитронов. Выясним, как отразится на излучении учет отклонения траектории от прямолинейной. Будем по-прежнему считать выполненным условие дипольности излучения релятивистских частиц в кристалле.

При  $\theta \lesssim \theta_c$  наряду с надбарьерным движением возможно явление каналирования. Траектории надбарьерных и каналированных частиц различны, поэтому будут разными и спектры излучения таких частиц. В рассматриваемой области углов  $\theta$ , как уже упоминалось, при нахождении траектории вдоль оси  $x$  движение нельзя считать близким к прямолинейному и для нахождения  $x(t)$  необходимо знать конкретный вид функции  $U(x)$ .

На рис. 6.2 представлены результаты вычисления межплоскостного потенциала кристалла кремния, относящиеся к кристаллической плоскости (110). Вычисления проводились по формуле (42.1) при  $T = 239$  К. Графики рис. 6.2, а относятся к потенциальной энергии взаимодействия позитрона с непрерывным потенциалом плоскости, а графики рис. 6.2, б — к потенциальной энергии взаимодействия электрона с той же плоскостью. Траектории частиц и спектральные распределения

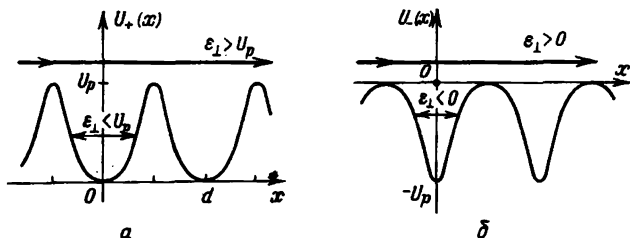


Рис. 6.2. Непрерывная потенциальная энергия взаимодействия позитронов (а) и электронов (б) с полем кристаллических плоскостей (110) кристалла кремния

излучения в таком поле могут быть найдены по формулам (42.2)—(42.6) и (43.6) численными методами.

С целью упрощений вычислений межплоскостной потенциал часто аппроксимируют функциями более простого вида. Рассмотрим простейшую из таких аппроксимаций, когда потенциальная энергия аппроксимируется параболической функцией [2]

$$U(x) = \pm U_p \frac{4x^2}{d^2}, \quad U_p = 2\pi\eta nR dZe^2, \quad (44.1)$$

где знаки «+» и «-» относятся соответственно к позитронам и электронам,  $|x| \leq d/2$ ,  $n$  — плотность атомов и  $\eta$  — числовой коэффициент, определяемый из условия наилучшей аппроксимации межплоскостного потенциала функцией вида (44.1).

В таком поле все величины, входящие в формулу (43.6), удастся вычислить аналитически для позитронов и электронов, движущихся как в условиях каналирования, так и в условиях надбарьерного движения.

Так, для каналированных и надбарьерных позитронов находим следующие выражения для спектров излучения:

$$\frac{d\mathcal{E}_c^+}{d\omega} = LA \frac{\pi^4}{8} \zeta [1 - 2\zeta(1 - \zeta)] (\beta^2 + \sigma^2) \Theta(1 - \zeta),$$

$$\beta^2 + \sigma^2 < 1, \quad (44.2a)$$

$$\frac{d\mathcal{E}_u^+}{d\omega} = LA \frac{\xi\zeta}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - \frac{2\xi\zeta}{\pi n} \left( 1 - \frac{\xi\zeta}{\pi n} \right) \right] \frac{\Theta(n - \xi\zeta/\pi)}{(n^2 - \xi^2/\pi^2)^2},$$

$$\beta^2 + \sigma^2 > 1. \quad (44.2б)$$

Здесь  $\beta = \theta/\theta_c$ ,  $\sigma = 2x_0/d$ ,  $\zeta = \delta d/2\theta_c$ ,  $T_c^+ = \pi d/\theta_c$ ,

$$\xi = \arcsin(\beta^2 + \sigma^2)^{-1/2}, \quad A = 32e^2 U_p^2 / \pi^4 m^2 \theta_c d.$$

При  $\theta = 0$  формула (44.2a) дает спектральное распределение излучения каналированных позитронов, найденное в работе [3]:

$$\frac{d\mathcal{E}_c^+}{d\omega} = LA \frac{\pi^4}{8} \zeta [1 - 2\zeta(1 - \zeta)] \Theta(1 - \zeta). \quad (44.3)$$



Если же  $\theta \neq 0$ , то согласно (44.2а) положение максимума в спектре излучения позитронов, как и в случае  $\theta = 0$ , будет расположено при  $\zeta = 1$ . Однако величина интенсивности излучения в максимуме будет отличаться от интенсивности при  $\theta = 0$ .

При  $\theta > \theta_c$  каналированные частицы отсутствуют. Интенсивность излучения позитронов в этом случае определяется формулой (44.2б). При этом если  $\theta \gtrsim \theta_c$ , то положение максимума спектра излучения расположено при  $\zeta \gtrsim 2/\pi$ . Разное расположение максимумов излучения каналированных и надбарьерных частиц обусловлено различием периодов их колебаний в кристалле. Величина интенсивности излучения надбарьерных частиц в максимуме спектра излучения при  $\theta \sim \theta_c$  по порядку величины сравнима с величиной интенсивности излучения каналированных частиц. В области углов  $\theta \gg \theta_c$  формула (44.2б) дает соответствующий результат теории когерентного излучения частиц в кристалле:

$$\frac{d\mathcal{E}_c^+}{d\omega} = LA \frac{\zeta}{2\beta^2} \sum_{n \geq \zeta/\pi\beta} n^{-4} \left[ 1 - \frac{2\zeta}{\pi n \beta} \left( 1 - \frac{\zeta}{\pi n \beta} \right) \right]. \quad (44.4)$$

Положение максимума интенсивности излучения в этом случае соответствует  $\zeta = \pi\beta$ ; величина интенсивности излучения в максимуме быстро убывает с увеличением  $\theta$ .

В случае электронов соответствующие спектры излучения каналированных и надбарьерных частиц в поле (44.1) определяются формулами

$$\frac{d\mathcal{E}_c^-}{d\omega} = 8LA\zeta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^2}{(n^2 + 4\xi^2\pi^{-2})^2} \left[ 1 - \frac{4\xi\zeta}{\pi n} \left( 1 - \frac{2\xi\zeta}{\pi n} \right) \right] \Theta \left( n - \frac{2\xi\zeta}{\pi} \right), \quad \sigma > \beta, \quad (44.5a)$$

$$\frac{d\mathcal{E}_c^-}{d\omega} = \frac{1}{2} LA\zeta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_1^2}{(n^2 + \xi_1^2\pi^{-2})^2} \left[ 1 - \frac{2\xi_1\zeta}{\pi n} \left( 1 - \frac{\xi_1\zeta}{\pi n} \right) \right] \Theta \left( n - \frac{\xi_1\zeta}{\pi n} \right), \quad \sigma < \beta. \quad (44.5b)$$

Здесь  $\xi = \text{arch}(\sigma^2 - \beta^2)^{-1/2}$ ,  $\xi_1 = \text{arsh}(\beta^2 - \sigma^2)^{-1/2}$  и штрих у знака суммы означает суммирование только по нечетным значениям  $n$ .

Формулы (44.2) и (44.5) показывают, что при  $\theta \lesssim \theta_c$  спектры излучения позитронов и электронов существенно различаются. Это различие обусловлено различием потенциалов взаимодействия позитронов и электронов с полем решетки. Так, если для позитрона функция  $U(x)$  близка к параболической, то в случае электронов эта функция представляет собой «перевернутую» параболу (см. рис. 6.2). Ясно, что траектории позитронов и электронов в таких потенциалах различны, поэтому различны и спектры их излучения.

При  $\theta \gg \theta_c$  формула (44.5б) переходит в (44.4). Излучение электронов и позитронов в этом случае одинаково.

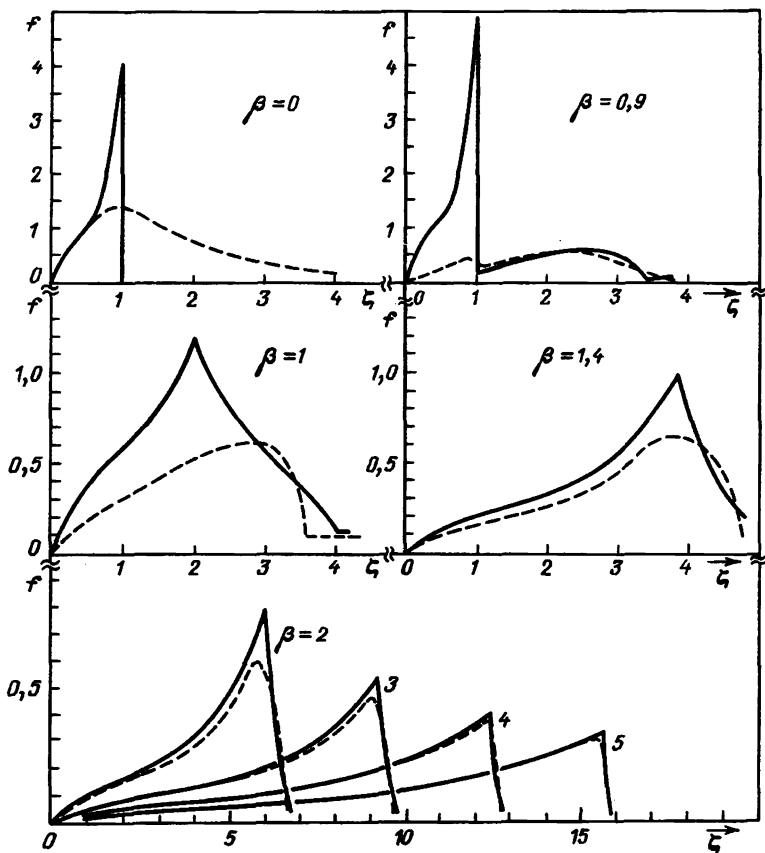


Рис. 6.3. Спектры излучения позитронов (сплошные линии) и электронов (штриховые) в поле непрерывного потенциала кристаллических плоскостей (44.1) при различных углах падения частиц по отношению к плоскости

Приведенные формулы относятся к заданным значениям  $\theta$  и  $x_0$ . При падении пучка на кристалл эти формулы должны быть усреднены с помощью соотношения (42.9) по  $x_0$ . Учитывая, что при  $\theta \leq \theta_c$  при падении пучка на кристалл в зависимости от  $x_0$  наряду с надбарьерным движением возможно явление каналирования, запишем среднее по  $x_0$  значение спектрального распределения излучения в виде

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = LAf(\zeta, \beta), \quad f(\zeta, \beta) = f_c + f_u, \quad (44.6)$$

где  $f(\zeta, \beta)$  — безразмерная функция параметров  $\zeta$  и  $\beta$ , определяемая формулой (42.9);  $f_c$  относится к каналированным частицам,  $f_u$  — к надбарьерным частицам.

На рис. 6.3 представлены результаты вычисления функции  $f(\zeta, \beta)$  в дипольном приближении при различных значениях

параметра  $\beta = \theta/\theta_c$ . Сплошные кривые относятся к позитронам, движущимся в поле с параболическим распределением потенциала, штриховые — к электронам, движущимся в поле типа «перевернутой параболы» [5, 6]\*). Приведенные графики показывают, как зависит спектр излучения от значения угла  $\theta$  и от знака заряда частицы.

В поле (44.1) определяющий вклад в излучение в области максимума спектрального распределения излучения вносит первая гармоника — первое слагаемое суммы по  $\nu$  в формуле (43.6). Максимум спектрального распределения излучения этой гармоники соответствует частотам  $\omega \sim 4\pi\gamma^2/T$ . При  $\theta \lesssim \theta_c$  в области максимума излучения  $f(\zeta, \beta) \sim 1$  (см. рис. 6.3), и, следовательно, в этой области частот  $\langle d\mathcal{E}/d\omega \rangle$  определяется по порядку величины толщиной кристалла  $L$  и значением множителя  $A$ . Сравнивая это значение  $\langle d\mathcal{E}/d\omega \rangle$  с величиной  $\langle d\mathcal{E}_{\text{вн}}/d\omega \rangle$ , соответствующей излучению частицы в аморфной среде, находим, что

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle \sim N_c \frac{d\mathcal{E}_{\text{вн}}}{d\omega}, \quad (44.7)$$

где  $N_c \sim nR^2d/\theta_c$  — число атомов решетки, которые находятся в пределах длины когерентности. Мы видим, что при  $\theta \lesssim \theta_c$  усиление излучения обусловлено когерентным механизмом излучения релятивистских частиц при взаимодействии с атомами кристаллической решетки. Резкие максимумы в спектре излучения (см. рис. 6.3) вызваны интерференцией волн, излучаемых частицей с периодически повторяющихся участков пути.

Приведенные на рис. 6.3 кривые показывают, что различие в спектральных распределениях излучения между электронами и позитронами особенно велико при малых углах  $\theta$  ( $\theta \lesssim \theta_c$ ). Начиная с  $\theta$  порядка  $2\theta_c$  спектры излучения электронов и позитронов практически совпадают.

При  $\theta \gg \theta_c$  существуют только надбарьерные частицы. Период колебаний этих частиц с уменьшением  $\theta$  увеличивается:  $T_u \sim d/\theta$ . При этом область характерных частот излучения  $\omega \sim 4\pi\gamma^2\theta/d$  уменьшается, а интенсивность излучения в максимуме возрастает.

При  $\theta < \theta_c$  наряду с надбарьерными частицами появляются каналированные частицы, период колебания которых примерно в два раза больше периода колебания надбарьерных частиц. Поэтому характерные частоты излучения каналированных частиц в два раза меньше характерных частот излучения надбарьерных частиц. На рис. 6.3 острый пик в спектральной плотности излучения позитронов в области  $\zeta \sim 1$  обязан

\* Для ряда других аппроксимаций межплоскостного потенциала результаты вычислений спектров излучения электронов и позитронов, движущихся вблизи кристаллической плоскости, представлены в работах [7—12] (см. также обзоры [13—19] и ссылки в них).

каналированным частицам, а максимум в области  $\zeta \gtrsim 2$  — надбарьерным частицам.

Отметим, что интенсивность излучения каналированных и надбарьерных частиц в области их максимумов излучения — одного порядка величины.

При  $\theta=0$  интенсивность излучения позитронов в области  $\zeta \approx 1$  меньше интенсивности излучения позитронов при  $\theta=0,9\theta_c$ . Это связано с тем, что при  $\theta=0,9\theta_c$  доля каналированных позитронов, амплитуда колебаний которых велика, больше, чем при  $\theta=0$  (вклад в спектр излучения частиц с большой амплитудой колебания является определяющим).

Отметим, что интенсивность излучения, определяемая формулами борновской теории когерентного излучения (31.1) и (43.7), неограниченно растет с уменьшением угла  $\theta$  [20, 21]. Результаты этой теории, однако, справедливы, если  $\theta \gg \theta_c$ . Полученные выше результаты показывают, что при  $\theta \lesssim \theta_c$  отмеченный рост интенсивности излучения прекращается и интенсивность излучения в этой области углов определяется формулой (44.7). Таким образом, учет влияния отклонения траектории частицы в кристалле от прямолинейной на излучение при  $\theta \sim \theta_c$  приводит к ограничению интенсивности излучения, определяемой формулами борновской теории когерентного излучения.

Заметим также, что при  $E \rightarrow \infty$ , согласно (44.7), интенсивность излучения в максимуме неограниченно растет. В этом случае, однако, нарушается условие дипольности излучения  $\gamma\theta_c \ll 1$ , использованное при выводе формулы (43.6), и следовательно, необходим учет эффектов, связанных с недипольностью излучения.

#### § 45. Влияние расходимости частиц в пучке на излучение

До сих пор мы считали, что частицы входят в кристалл под строго заданным углом  $\theta$  к одной из кристаллических плоскостей. Практически, однако, пучок всегда обладает некоторой расходимостью, поэтому важно выяснить, как влияет расходимость пучка на излучение. Спектральная плотность излучения в этом случае в дипольном приближении будет определяться формулой

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = LA \int d\theta g(\theta) f(\zeta, \beta), \quad (45.1)$$

где  $g(\theta)$  — функция распределения по углу  $\theta$  влетевших в кристалл частиц. В простейшем случае, когда частицы падают параллельно кристаллическим плоскостям и частицы в пучке распределены равномерно в интервале углов  $\theta_0 \geq \theta \geq 0$ , функция  $g(\theta)$  имеет вид

$$g(\theta) = \frac{1}{\theta_0} \Theta(\theta_0 - |\theta|),$$

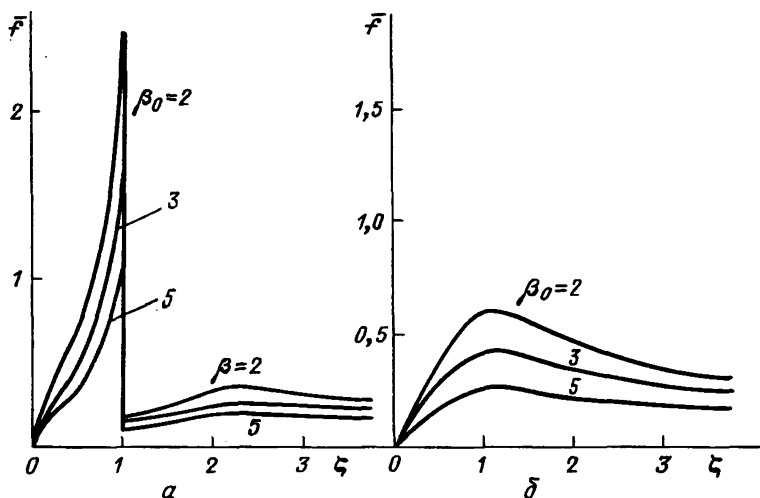


Рис. 6.4. Спектры излучения позитронов (а) и электронов (б) в поле кристаллических плоскостей с учетом расходимости частиц в пучке

где  $\Theta(x)$  — ступенчатая функция (2.9). При этом

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = LA\bar{f}(\zeta, \beta_0), \quad \bar{f} = \frac{1}{\beta_0} \int_0^{\beta_0} d\beta f(\zeta, \beta), \quad (45.2)$$

где  $\beta_0 = \theta_0/\theta_c$ . На рис. 6.4 представлены графики функции  $\bar{f}(\zeta, \beta_0)$  для позитронов (а) и для электронов (б) в том случае, когда частицы движутся в поле вида (44.1).

Если пучок обладает расходимостью, то в условиях каналирования будет находиться лишь часть частиц пучка. При этом каналированные частицы будут вносить основной вклад в излучение в области частот  $\omega \sim 4\gamma^2\theta_c/d$  (т. е.  $\zeta \sim 1$ ), а надбарьерные частицы — в области частот  $\omega \gtrsim 8\gamma^2\theta_c/d$  (т. е.  $\zeta \gtrsim 2$ ).

Из графиков видно, что в случае пучка позитронов с большой расходимостью имеет место резко выраженный максимум в спектре излучения при  $\zeta = 1$ . Все каналированные позитроны в этом случае имеют одинаковый период колебаний и, следовательно, все эти частицы дают основной вклад в излучение при  $\zeta \sim 1$ . Что касается надбарьерных позитронов, то для них нет резкого максимума в спектре излучения, так как надбарьерные позитроны с различными значениями  $\theta$  дают вклад в излучение в различных областях частот (см. рис. 6.3).

Для электронов, движущихся в условиях каналирования, период колебания существенно зависит от значения угла  $\theta$  и от координаты точки влета частицы в кристалл, поэтому в спектре их излучения нет резкого максимума.

До сих пор мы не учитывали многократного рассеяния частиц, которое играет важную роль, если средний квадрат

угла при многократном рассеянии  $\overline{\vartheta_a^2}$  превосходит квадрат угла расходимости пучка  $\theta_0^2$ . В этом случае функцию распределения  $g(\theta)$ , входящую в формулу (45.1), следует считать зависящей не только от угла  $\theta$ , но и от глубины проникновения частицы в кристалле  $g(\theta) \rightarrow g(\theta, z)$ . Учитывая, что  $f(\zeta, \beta)$  не зависит от  $z$ , мы можем при нахождении спектра излучения заменить  $g(\theta)$  на

$$\overline{g}(\theta) = \frac{1}{L} \int_0^L dz g(\theta, z). \quad (45.3)$$

При этом среднее значение спектральной плотности излучения прошедшего через кристалл пучка будет определяться формулой (45.1) с функцией распределения (45.3).

Заметим, что этот результат справедлив, если процесс многократного рассеяния развивается адиабатически с глубиной проникновения частиц в кристалл. А именно, требуется, чтобы на периоде одного колебания частицы в поле  $U(x)$  ее траектория не испытывала значительных флюктуаций. Если же это условие не выполняется — в частности, если на периоде одного колебания флюктуации интеграла энергии поперечного движения  $\sqrt{(\delta \epsilon_{\perp})^2}$  будут порядка глубины потенциальной ямы  $U_p$ , то траектория частицы в поле  $U(x)$  будет существенно стохастической. Приведенные выше формулы, основанные на периодическом характере движения частицы в поле  $U(x)$ , в этом случае теряют свою силу, и анализ процесса излучения должен проводиться с учетом стохастического характера движения частицы в кристалле (см. гл. 8).

## § 46. Учет недипольности излучения

Формула (43.6) для спектральной плотности излучения справедлива в случае дипольного приближения, т. е. при условии  $\gamma \vartheta_1 \ll 1$ . Если же имеет место условие  $\gamma \vartheta_1 \gtrsim 1$ , то дипольным приближением пользоваться нельзя и спектр излучения необходимо определять по формуле (6.5).

Нарушение условия дипольности излучения раньше всего наступает для каналированных частиц. Так, для этих частиц  $\vartheta_1 \sim \theta_c$ , поэтому  $(\gamma \vartheta_1)^2 \sim 2U_p \gamma / m$ ; последняя же величина при достаточно больших энергиях больше единицы. В случае надбарьерных частиц ( $\theta > \theta_c$ ) величина  $\vartheta_1$  порядка  $\theta_c^2 / \theta$ , т. е.  $\vartheta_1 < \theta_c$ , поэтому для надбарьерных частиц величина  $\gamma \vartheta_1$  значительно меньше, чем для каналированных частиц (фактор  $\theta_c / \theta$  отражает уменьшение времени действия сил для надбарьерной частицы по сравнению с каналированной). По этой причине мы рассмотрим влияние недипольности излучения только для каналированных частиц, предполагая, что частицы

пучка падают на кристалл параллельно кристаллическим плоскостям \*).

Усредненная по точкам влета спектральная плотность излучения каналированных частиц определяется формулами (6.5) и (42.9). В общем виде вычислить входящие в эти формулы интегралы в аналитическом виде не удается, поэтому для нахождения среднего значения спектральной плотности излучения  $\langle d\mathcal{E}/d\omega \rangle$  должны быть использованы численные методы. Если известна траектория частицы  $x(t)$  вдоль оси  $x$ , то для нахождения  $\langle d\mathcal{E}/d\omega \rangle$  необходимо вычислить тройной интеграл — по времени  $t$ , по азимутальному углу  $\varphi$  и по координате точки влета частицы в кристалл  $x_0$ .

Величину  $\langle d\mathcal{E}/d\omega \rangle$  удобно записать в виде

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = LA f_x(\xi), \quad (46.1)$$

где  $\kappa = \gamma\theta_c$  — параметр недипольности излучения каналированной частицы. Для позитронов, движущихся в кристалле алмаза вдоль плоскости (110), функция  $f_x(\xi)$  представлена на рис. 6.5 [22]. Межплоскостной потенциал предполагается параболическим,  $U_p = 20$  эВ.

Рис. 6.5. Учет влияния эффекта недипольности на излучение каналированных позитронов с энергией 6 и 14 ГэВ (кривые 1 и 2) в кристалле алмаза при движении частиц вдоль плоскости (110). Кривая 3 соответствует результату дипольного приближения

Из формул (6.5) и (42.9) следует, что при  $\kappa \lesssim 1$  положение максимума спектра излучения каналированных позитронов определяется из условия  $2\pi/T_c = (1 + \gamma^2 v_{\perp}^2) \delta$ . В случае параболического потенциала (44.1) это приводит к следующему значению частоты, соответствующей максимуму спектральной плотности излучения:

$$\omega_{\max} = \frac{\omega_0}{1 + \frac{1}{2}\kappa^2}, \quad (46.2)$$

где  $\omega_0 = 4\gamma^2\theta_c/d$  — положение максимума спектра излучения в дипольном приближении. Этому значению  $\omega_{\max}$  соответствует значение  $\zeta$ , равное

$$\zeta_{\max} = \left(1 + \frac{1}{2}\kappa^2\right)^{-1}.$$

Приведенные на рис. 6.5 графики показывают, что при  $\zeta < \zeta_{\max}$  дипольное и недипольное приближения дают близкие

\* На необходимость учета недипольности для описания излучения каналированных частиц было обращено внимание в работе [10].

результаты. При  $\zeta > 1$  в дипольном приближении спектральная плотность излучения равна нулю, тогда как учет недипольности излучения приводит к значению этой величины, отличному от нуля.

Простую формулу для спектра излучения можно получить в области частот  $\omega \lesssim \omega_{\max}$ , если каналированные позитроны движутся в поле с параболическим распределением плоскостного потенциала. Для этого необходимо воспользоваться формулой (3.6). При движении позитрона в таком поле  $x(t) = x_0 \cos \Omega t$ , где  $\Omega = 2\theta_c/d$  и  $|x_0| \leq d/2$ . Подставляя это выражение  $x(t)$  в (3.6) и замечая, что

$$v^*(t)\gamma = \gamma [v_{\perp}(t+t_2) - v_{\perp}(t_2)] = -2\kappa\xi \left( \sin \frac{1}{2} \tau_1 \right) \cos \left( \tau_2 + \frac{1}{2} \tau_1 \right),$$

где  $\xi = 2x_0/d$ ,  $\tau_1 = \Omega t$  и  $\tau_2 = \Omega t_2$ , получим после интегрирования по  $\tau_2$  формулу (6.12), в которой следует произвести замену  $\kappa \rightarrow \xi\kappa$ .

Формула (6.12) справедлива при любых частотах. Параметр недипольности излучения  $\kappa$  входит в эту формулу в виде комбинации  $1/2 \zeta \kappa^2 \xi^2$ . В области малых частот последняя величина будет малой независимо от значения  $\kappa$ . В первом приближении по этому параметру среднее значение спектральной плотности излучения приобретает вид [6]

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = N\pi e^2 \kappa^2 \zeta [1 - 2\zeta(1 - \zeta)] \times \int_0^1 d\xi \xi^2 \Theta \left( 1 - \zeta \left( 1 - \zeta \left( 1 + \frac{\kappa^2 \xi^2}{2} \right) \right) \right). \quad (46.3)$$

Эта простая формула хорошо описывает спектр излучения каналированных позитронов в области частот  $\omega \lesssim \omega_{\max}$  (см. также (6.13)). Основной вклад в излучение в этой области частот вносит первая гармоника излучения.

Рассмотрим теперь поведение интенсивности излучения в максимуме спектральной плотности излучения (46.3) при  $E \rightarrow \infty$ . Максимум функции (46.3) соответствует значению  $\zeta_{\max} = (1 + 1/2 \kappa^2)^{-1}$ . В этой области частот по порядку величины имеем

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle \sim \frac{\pi}{3} N e^2 \kappa^2 \zeta_{\max} = \frac{L e^2 \theta_c}{d \pi} \frac{\kappa^2}{1 + \frac{1}{2} \kappa^2}. \quad (46.4)$$

Отсюда находим, что при  $E \rightarrow \infty$

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle \sim \frac{L}{d} e^2 \theta_c \rightarrow 0. \quad (46.5)$$



Таким образом, учет недипольности излучения ограничивает отмеченный в § 44 рост интенсивности излучения в максимуме при увеличении энергии частицы и, более того, при  $E \rightarrow \infty$  приводит не к росту, а к уменьшению интенсивности излучения в максимуме.

Отметим, что этот результат относится только к первой гармонике. При больших значениях параметра недипольности ( $\kappa \gg 1$ ) максимум спектрального распределения излучения каналированных позитронов приходится на область частот, значительно превосходящих частоту, соответствующую максимуму первой гармоники. В этой области частот вклад в излучение вносит большое число гармоник.

### § 47. Квантовая теория излучения фотонов заряженными частицами в поле кристаллических плоскостей

Полученные в предыдущих параграфах результаты относились к случаю, когда излучение частицы в кристалле может быть описано в рамках классической электродинамики. Для этого требуется, чтобы в пределах длины когерентности находилось большее число атомов решетки и чтобы числа квантовых состояний, вовлеченных в процесс излучения, были велики. Ниже будет показано, что последнее требование выполняется только в области достаточно высоких энергий частиц  $E \geq 100$  МэВ. С уменьшением же энергии частицы это условие нарушается и, следовательно, в этих условиях необходим учет эффектов, связанных с квантовым характером движения частицы в кристалле.

Рассмотрим излучение быстрой частицы в кристалле в этом случае и проследим переход квантовых формул для интенсивности излучения в классические [23—25]. Для простоты ограничимся изучением излучения частиц в поле непрерывного потенциала кристаллических плоскостей, т. е. случаем, когда ее движение в поперечной плоскости является одномерным и, кроме того, будем интересоваться излучением только каналированных частиц \*).

С этой целью рассмотрим излучение при переходе частицы из некоторого начального состояния  $|i\rangle$  в конечное  $|f\rangle$ . Матричный элемент этого процесса определяется формулой (12.2). Входящие в эту формулу волновые функции электрона (позитрона) представляют собой биспиноры, удовлетворяющие уравнению Дирака (9.1). Волновую функцию  $\psi(\mathbf{r}, t)$  удобно представить в виде

$$\psi(\mathbf{r}, t) = (\gamma_\mu P_\mu + m) \Phi(\mathbf{r}, t), \quad P_\mu = -i \frac{\partial}{\partial x_\mu} - eA_\mu.$$

\*) Квантовые эффекты при взаимодействии надбарьерных частиц с решеткой исследовались в работах [26—31].

Тогда функция  $\Phi$  будет удовлетворять квадрированному уравнению Дирака (9.3). В рассматриваемом случае движения частицы в поле непрерывного потенциала кристаллических плоскостей (42.1) это уравнение имеет вид

$$\left[ \left( i \frac{\partial}{\partial t} - U(x) \right)^2 + \nabla^2 - m^2 + i\gamma_0 \gamma \nabla U(x) \right] \Phi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (47.1)$$

Оценка слагаемого  $i\gamma_0 \gamma \nabla U$  в этом уравнении, описывающего взаимодействие спина частицы с полем, приводит к результату

$$|i\gamma_0 \gamma \nabla U| \sim v_{\perp} U_p / d,$$

где  $v_{\perp}$ ,  $U_p$  и  $d$  — характерные значения поперечной скорости, потенциальной энергии и размеров области действия поля соответственно. Для релятивистских каналированных частиц  $v_{\perp} / d \sim \theta_c / d < U_p$ , поэтому слагаемым в (47.1), содержащим  $\gamma$ -матрицы, можно пренебречь. При этом функция  $\Phi$  может быть представлена в виде произведения постоянного биспинора  $u$  на функцию  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ , удовлетворяющую уравнению Клейна — Гордона:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = u \varphi(\mathbf{r}, t).$$

В рассматриваемом случае, как и в классической теории, можно разделить продольное и поперечное движение частицы. Так как усредненный потенциал плоскостей не зависит от координат  $\mathbf{r}_{\parallel} = (y, z)$  в кристаллической плоскости, то волновая функция  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  может быть представлена в виде

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi(x) e^{-iEt + i\mathbf{p}_{\parallel} \mathbf{r}_{\parallel}}, \quad (47.2)$$

где  $p_{\parallel}$  — составляющая импульса частицы, параллельная кристаллическим плоскостям,  $E = E_{\parallel} + \varepsilon_{\perp}$  — полная энергия, представляющая сумму продольной  $E_{\parallel} = \sqrt{\mathbf{p}_{\parallel}^2 + m^2}$  и поперечной  $\varepsilon_{\perp}$  энергий. Подставляя (47.2) в (47.1) и пренебрегая квадратичными по  $U$  и  $\varepsilon_{\perp}$  слагаемыми, приходим к следующему уравнению для функции  $\varphi(x)$ :

$$\left[ -\frac{1}{2E_{\parallel}} \frac{d^2}{dx^2} + U(x) \right] \varphi(x) = \varepsilon_{\perp} \varphi(x). \quad (47.3)$$

Это уравнение по виду совпадает с уравнением Шредингера для волновой функции, однако роль массы частицы теперь играет релятивистская масса  $E_{\parallel} \approx E$ .

Классическое описание поперечного движения справедливо, если длина волны  $\lambda_{\perp} \sim 1/p_{\perp}$ , соответствующая поперечному импульсу  $p_{\perp} = \sqrt{2E(\varepsilon_{\perp} - U(x))}$ , мала по сравнению с характерным размером области поперечного движения, равным по порядку величины ширине канала  $d$ . Для каналированных частиц это соотношение приобретает вид

$$\lambda_{\perp} \sim (2E |U_p|)^{-1/2} \ll d.$$

С другой стороны, величина  $d/\lambda_{\perp}$  по порядку величины совпадает с числом связанных состояний в усредненном поле кристаллических плоскостей, поэтому можно сказать, что классическое описание поперечного движения справедливо, если число уровней поперечного движения в потенциальной яме велико. Так как  $\lambda_{\perp} \sim E^{-1/2}$ , то при достаточно высоких энергиях частиц их движение становится классическим.

Рассмотрим в качестве примера движение релятивистских каналированных электронов в поле непрерывного потенциала кристаллических плоскостей вида (44.1). Условие квантования уровней поперечного движения в этом случае определяется соотношением

$$\oint p_{\perp} dx = 2\pi \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (47.4)$$

Интегрирование здесь ведется вдоль пути, проходимого электроном в поперечном направлении за время, равное периоду одного колебания  $T$ .

Если межплоскостной потенциал представляет собой потенциал вида перевернутой параболы (44.1), то согласно (47.4),

$$d \sqrt{2EU_p} \left[ 1 - \frac{|\varepsilon_{\perp}|}{U_p} - \frac{|\varepsilon_{\perp}|}{U_p} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - |\varepsilon_{\perp}| U_p^{-1}}}{\sqrt{|\varepsilon_{\perp}| U_p^{-1}}} \right] = 2\pi \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (47.5)$$

Число уровней поперечного движения  $n_{\max}$  при этом по порядку величины определяется соотношением

$$n_{\max} \approx \frac{1}{2\pi} d \sqrt{2EU_p}. \quad (47.6)$$

Характерные значения глубины потенциальной ямы порядка нескольких десятков электронвольт, а ширина канала порядка нескольких ангстрем (для плоскости (110) кристалла кремния, например,  $U_p \approx 22$  эВ и  $d \approx 2 \text{ \AA}$ ), поэтому

$$n_{\max} \approx \sqrt{E(\text{МэВ})},$$

где  $E(\text{МэВ})$  — энергия электрона в мегаэлектронвольтах и, следовательно, квантовый характер движения частицы в поле непрерывного потенциала кристаллических плоскостей может проявляться вплоть до энергий порядка десятков МэВ\*).

Для каналированных позитронов межплоскостной потенциал близок к параболическому. В этом случае, согласно (47.4),

$$\varepsilon_{\perp n} = \frac{4U_p}{d \sqrt{2EU_p}} \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (47.7)$$

\* При энергиях частиц  $E \lesssim 1$  МэВ приближение непрерывных плоскостей теряет свою силу. Эффект каналирования в этом случае быстро сменяется дифракционными эффектами, которые можно описывать в рамках многоволновой динамической теории дифракции электронов [32]. Квантовая теория эффекта каналирования, основанная на многоволновой теории дифракции частиц в кристалле, развита в работах [33, 34].

и

$$n_{\max} \approx \frac{1}{4} d \sqrt{2EU_p}.$$

Таким образом, для позитронов, в отличие от электронов, уровни поперечной энергии являются эквидистантными, причем число этих уровней, при одинаковой глубине потенциальной ямы для позитронов больше, чем для электронов. Последнее связано с тем, что для позитронов потенциальная яма, в которой происходит движение частицы, является более широкой, чем для электронов.

Подставляя выражения (47.2) для волновых функций начального и конечного состояний в матричный элемент процесса излучения (12.2), получим

$$M_{fi} = c_f^* c_i 4\pi^2 \delta(E_f + \omega - E_i) \delta(\mathbf{p}_{\parallel f} + \mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{p}_{\parallel i}) \times \\ \times \int dx \varphi_f^*(x) \bar{u}_f(\hat{p}_f + m) \hat{\epsilon}(\hat{p} + m) u \varphi(x) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (47.8)$$

где  $c_i$  и  $c_f$  — нормировочные постоянные начальной и конечной волновых функций,

$$p_{\mu} = \left( E; \mathbf{p}_{\parallel}, -i \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad p_{\mu f} = \left( E_f; \mathbf{p}_{\parallel f}, -i \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

причем действие операторов  $p$  и  $p_f$  в (47.8) распространяется соответственно на функции  $\varphi(x)$  и  $\varphi_f^*(x)$ .

Имея это выражение для матричного элемента, можно, согласно (12.1), найти отнесенную к единице длины вероятность излучения частицей фотона с энергией  $\omega$  в элемент телесного угла  $d\sigma$ :

$$\frac{dw}{dt d\omega d\sigma} = \frac{e^2 \omega}{4\pi^2} |c_i c_f|^2 L_y L_z \sum_f \delta(E_f + \omega - E_i) \times \\ \times \left| \int dx \varphi_f^*(x) \bar{u}_f(\hat{p}_f + m) \hat{\epsilon}(\hat{p} + m) u \varphi(x) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right|^2. \quad (47.9)$$

Выполнив в этой формуле суммирование по поляризациям конечных частиц и усреднение по поляризациям начальных частиц, приходим к следующему выражению для вероятности излучения [23]:

$$\frac{dw}{dt d\omega d\sigma} = \frac{e^2 \omega}{2\pi} \sum_f \left\{ \left( 1 + \zeta + \frac{\zeta^2}{2} \right) \left[ \theta_{\gamma}^2 |I_{if}^{(1)}|^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + |I_{if}^{(2)}|^2 - 2 \operatorname{Re} \theta_{\gamma} \cos \varphi I_{if}^{(1)} I_{if}^{(2)*} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\zeta^2}{2E^2} |I_{if}^{(1)}|^2 \right\} \delta(E_f + \omega - E), \quad (47.10)$$

где  $\theta_\gamma$  и  $\varphi$  — полярный и азимутальный углы излучения,  $\zeta = \omega/(E - \omega)$ ,

$$I_{if}^{(1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ixk_x} \varphi_f^*(x) \varphi(x), \quad (47.11)$$

$$I_{if}^{(2)} = -\frac{i}{E} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ixk_x} \varphi_f^*(x) \frac{d}{dx} \varphi(x),$$

а  $\varphi(x)$  и  $\varphi_f(x)$  — волновые функции начального и конечного состояний электрона, соответствующие энергиям  $E$  и  $E_f = E - \omega$ .

При выводе формулы (47.10) мы воспользовались тем, что характерные значения углов излучения релятивистской частицы малы по сравнению с единицей:  $\theta_\gamma \sim m/E \ll 1$ . Заметим, что с той же точностью аргумент дельта-функции в (47.10) может быть записан в виде

$$E_f + \omega - E = E_{\parallel p-k} + \omega - E_{\parallel p} + \omega_{if} \approx \approx \frac{1}{2} \zeta \left[ \left( \theta_\gamma^2 + \frac{m^2}{E^2} \right) E - \omega \theta_\gamma^2 \cos^2 \varphi \right] + \omega_{if}, \quad (47.12)$$

где  $\omega_{if} = \varepsilon_{\perp f}(E - \omega) - \varepsilon_{\perp i}(E)$ .

Формула (47.10) определяет вероятность излучения в общем виде независимо от числа уровней поперечного движения и вида потенциала  $U(x)$ . Конкретные вычисления могут быть проведены только путем численного интегрирования, если задан вид потенциала  $U(x)$ . Такие вычисления проведены в ряде работ (см. [11, 35—39], обзоры [14—18] и ссылки в них). Мы не будем здесь приводить конкретных результатов вычислений по формуле (47.10), а ограничимся лишь изучением перехода квантовой формулы в соответствующий результат классической теории. С этой целью рассмотрим вероятность излучения (47.10) в случае малых частот излученных фотонов и больших квантовых чисел, определяющих поперечное движение частицы.

В области малых частот излученных фотонов ( $\omega \ll E$ ) слагаемыми, пропорциональными  $\zeta$  и  $\zeta^2$  в общей формуле (47.10), можно пренебречь. При этом она приобретает вид

$$\frac{dw}{dt d\omega d\sigma} = \frac{e^2 \omega}{2\pi} \sum_f \{ \theta_\gamma^2 |I_{if}^{(1)}|^2 + |I_{if}^{(2)}|^2 - 2 \operatorname{Re} \theta_\gamma \cos \varphi I_{if}^{(1)} I_{if}^{(2)*} \} \delta(E_f + \omega - E). \quad (47.13)$$

Учитывая малость  $\omega$ , величину  $\omega_{if}$  можно разложить по параметру  $\omega/E$ . В первом приближении такого разложения находим, что

$$\omega_{if} \approx \omega_{if}^{(0)} - \omega \frac{\partial}{\partial E} \varepsilon_{\perp i}(E) + \dots, \quad (47.14)$$

где  $\omega_{if}^{(0)} = \varepsilon_{\perp f}(E) - \varepsilon_{\perp i}(E)$ . При этом аргумент дельта-функции в (47.13) приобретает вид

$$E_f + \omega - E \approx \frac{\omega}{2} \left[ \theta_\gamma^2 + \frac{m^2}{E^2} - 2 \frac{\partial}{\partial E} \varepsilon_{\perp f}(E) \right] + \omega_{if}^{(0)}. \quad (47.15)$$

В классическом пределе квантовые числа, определяющие поперечное движение, велики:  $i \gg 1$ ,  $f \gg 1$ ; разность же между ними мала:  $|i-f| \ll i$ , — поэтому можно воспользоваться соотношением

$$\omega_{if}^{(0)} \approx (i-f) \frac{\partial \varepsilon_{\perp i}}{\partial i}. \quad (47.16)$$

Величину  $\partial \varepsilon_{\perp i} / \partial i$  определим из условия квантования уровней поперечной энергии (47.4). Запишем это условие в виде

$$\int_{-x_m}^{+x_m} dx \sqrt{2E(\varepsilon_{\perp} - U(x))} = \pi \left( i + \frac{1}{2} \right). \quad (47.17)$$

Отсюда находим, что

$$\frac{\partial \varepsilon_{\perp i}}{\partial i} = \omega_0(E), \quad (47.18)$$

где  $\omega_0(E)$  — частота классических колебаний частицы с энергией  $E$  в поле  $U(x)$ .

Определим теперь значение производной  $\partial \varepsilon_{\perp} / \partial E$ . Дифференцируя (47.17) по  $E$ , получим

$$\frac{\partial \varepsilon_{\perp}}{\partial E} \int_{-x_m}^{+x_m} dx \sqrt{\frac{E}{\varepsilon_{\perp} - U(x)}} = - \int_{-x_m}^{+x_m} \sqrt{\frac{\varepsilon_{\perp} - U(x)}{E}} dx.$$

Из этого соотношения находим, что

$$\frac{\partial \varepsilon_{\perp f}}{\partial E} = - \frac{1}{2T} \int_0^T dt v_{\perp}^2(t), \quad (47.19)$$

где  $T$  — период колебания и  $v_{\perp}(t)$  — скорость частицы в поперечном направлении.

Таким образом, в классическом пределе аргумент дельта-функции в (47.10) определяется формулой

$$E_f + \omega - E \approx \frac{\omega}{2} \left[ \theta_\gamma^2 + \frac{m^2}{E^2} - \frac{1}{T} \int_0^T dt v_{\perp}^2(t) \right] - \frac{2\pi}{T} (f-i). \quad (47.20)$$

Это выражение совпадает с аргументом дельта-функции в формуле (6.4) классической теории ондуляторного излучения.

Покажем теперь, что матричные элементы  $I_{if}^{(1)}$  и  $I_{if}^{(2)}$  в классическом пределе переходят в компоненты вектора  $\mathbf{I}$  входящего в формулу (6.3). С этой целью воспользуемся квазиклассическим приближением для поперечных волновых функций:

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega_0(E) [2E(\varepsilon_{\perp}(E) - U(x))]^{-1/2} \times \\ \times \cos \left[ \int_{-x_m}^x dx p_{\perp}(x) - \frac{\pi}{4} \right]. \quad (47.21)$$

Подставляя функции (47.21) в матричный элемент  $I_{if}^{(1)}$  и учитывая, что  $|i-f| \ll i$  запишем этот матричный элемент в виде

$$I_{if}^{(1)} = \frac{1}{\pi} \omega_0(E) \int_{-x_m}^{+x_m} \frac{dx}{v_x} e^{ixk_x} \cos(\Delta\Phi_{if}), \quad (47.22)$$

где  $v_x$  — скорость поперечного движения и

$$\Delta\Phi_{if} = \int_{-x_m}^{+x_m} dx \left\{ \sqrt{2E(\varepsilon_{\perp i}(E) - U(x))} - \right. \\ \left. - \sqrt{2E_f(\varepsilon_{\perp f}(E) - U(x))} \right\}. \quad (47.23)$$

Раскладывая подынтегральное выражение (47.23) по  $\omega/E$  и по параметру  $(i-f)$ , находим с учетом соотношения  $v_x = dx/dt$ , что

$$\Delta\Phi_{if} = \omega_0(E) (i-f) t - \frac{\omega}{2} \int_0^t d\tau (v_x^2(\tau) - \overline{v_x^2}),$$

где  $\overline{v_x^2} = T^{-1} \int_0^T dt v_x^2(t)$  — среднее значение квадрата поперечной скорости.

Таким образом, матричный элемент  $I_{if}^{(1)}$  в классическом пределе совпадает с величиной  $I_{\parallel}$  в (6.5). Аналогичным путем легко показать, что матричный элемент  $I_{if}^{(2)}$  в классическом пределе переходит в соответствующее значение вектора  $\mathbf{I}_{\perp} = (I_x, 0)$  в (6.5).

Подставляя полученные выражения для матричных элементов  $I_{if}^{(1)}$  и  $I_{if}^{(2)}$  в (47.13), находим, что формула (47.13) в классическом пределе переходит в соответствующий результат классической теории (6.5). При этом суммирование по конечным состояниям в (47.13) соответствует суммированию по гармоникам в формуле (6.5). Мы видим, что квантовая формула для вероятности излучения переходит в соответствующий

результат классической теории, если можно пренебречь отдачей при излучении и если числа квантовых состояний излучающей частицы велики.

### § 48. Влияние неоднородности потенциала плоскости на излучение

Полученные выше формулы справедливы, если в пределах длины когерентности находится большее число атомов кристаллографической плоскости, вблизи которой движется частица. Если это условие не выполняется, то необходим учет влияния на излучение неоднородности распределения потенциала в плоскости [5, 40]. Такая ситуация реализуется, например, в том случае, когда движение происходит вблизи кристаллической плоскости и, кроме того, когда частота излучения по порядку величины равна  $\omega \sim \gamma^2 \psi / a_2$ , где  $\psi$  — угол между падающим пучком и кристаллографической осью, лежащей в плоскости (предполагается, что угол  $\psi$  удовлетворяет условиям  $R/a \gg \psi \gg \psi_c$ , причем  $\psi \gg \theta$ ) и  $a_2$  — расстояния между цепочками атомов в данной плоскости (рис. 6.6). Частица в этом случае последовательно сталкивается с различными цепочками атомов кристалла, расположенными в плоскости, причем длина  $l_c$ , на которой формируется излучение, сравнима с длиной свободного пробега частицы между этими столкновениями. Поэтому в интересующем нас случае необходимо учитывать корреляции между последовательными столкновениями частицы с различными цепочками атомов, находящимися в плоскости, и, кроме того, необходим учет влияния на излучение неоднородности распределения потенциала в плоскости.

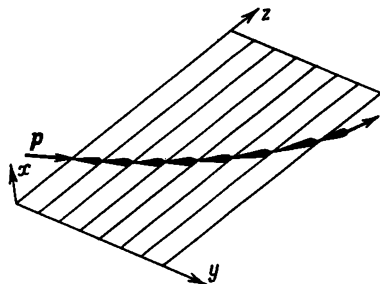


Рис. 6.6. Излучение в области когерентных максимумов при движении частицы вдоль кристаллической плоскости под малым углом к одной из кристаллических осей

Вопрос об излучении релятивистских частиц в кристалле в этих условиях рассматривался в § 29. Результаты этого параграфа, однако, относятся к случаю, когда отсутствуют явления плоскостного каналирования и надбарьерного движения частиц. Покажем, как эти явления сказываются на излучении в интересующей нас области частот  $\omega \sim \gamma^2 \psi / a^2$  [5, 41, 42].

В рассматриваемой области частот выполняется неравенство  $l_c \ll vT$ , где  $T$  — период колебания скорости в поле непрерывного потенциала кристаллических плоскостей, поэтому путь, проходимый частицей за время  $T$ , можно разбить на  $M = vT/s$  участков длиной  $s$ , удовлетворяющих условиям  $l_c \ll s \ll vT$ .



Тогда на  $n$ -м участке пути расстояние  $x_n$  от частицы до ближайшей плоскости можно считать постоянным (существенное изменение траектории вдоль оси  $x$  происходит за время  $T$ ). Кроме того, в этом случае можно пренебречь интерференцией волн, излученных частицей с различных участков пути (см. § 8). Поэтому спектральную плотность излучения частицы в кристалле можно представить в виде суммы спектральных плотностей излучения с участков пути длины  $s$ :

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \sum_n \frac{d\mathcal{E}(x_n)}{d\omega}. \quad (48.1)$$

Так как  $x_n$  плавно изменяется с ростом  $n$ , то суммирование по  $n$  в (48.1) можно заменить интегрированием по времени:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = v \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{1}{s} \frac{d\mathcal{E}(x(\tau))}{d\omega}, \quad (48.2)$$

где  $x(\tau)$  определяется из уравнения (42.2).

Траектория частицы  $x(\tau)$  вдоль оси  $x$ , согласно (42.4), определяется энергией поперечного движения  $\varepsilon_{\perp} = 1/2 E \theta^2$  и точкой влета частицы в кристалл  $x_0$ . Если распределение частиц при входе в кристалл по  $x_0$  является равномерным, то среднее значение спектральной плотности излучения имеет вид

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \frac{v}{a_3} \int_0^{a_3} dx_0 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{1}{s} \frac{d\mathcal{E}(x(\tau, x_0))}{d\omega}. \quad (48.3)$$

Таким образом, для нахождения среднего значения спектра излучения (48.3) необходимо прежде всего вычислить интенсивность излучения в интервале частот  $(\omega, \omega + d\omega)$  с единицы пути, проходимого частицей вдоль кристаллической плоскости на расстоянии  $x$  от этой плоскости. Вычисления проведем в дипольном приближении.

Воспользуемся с этой целью формулой (5.2) для спектральной плотности излучения. Входящее в эту формулу ускорение определяется уравнением

$$\dot{v}_{\perp} = -\frac{1}{E} \nabla_{\perp} U_p(x, y(t), z(t)),$$

где  $U_p(x, y, z)$  — потенциальная энергия взаимодействия частицы с атомами, находящимися в плоскости, вблизи которой происходит движение

$$U_p(x, y, z) = \sum_{n,m} u(x, y - na_2, z - ma_3).$$

В рассматриваемой области углов  $\psi$  ( $\psi_c \ll \psi \ll R/a$ ) движение частицы вдоль осей  $z$  и  $y$  можно считать прямолинейным:

$z(t) \approx v(t)$ ,  $y(t) \approx \psi vt$ . Используя эти соотношения и фурье-разложение потенциальной энергии, находим, что при заданном значении координаты  $x$  фурье-компонента ускорения приобретает вид

$$\mathbf{W}(q) = \frac{2\pi i}{\Delta} \sum_g \delta(q - g_{\parallel}) \mathbf{g}_{\perp} u_g e^{-ig_x x}, \quad (48.4)$$

где  $\mathbf{g}$  — вектор обратной решетки,  $\mathbf{g}_{\perp} = (g_x, g_y)$ ,  $g_{\parallel} = g_z + \psi g_y$ , и  $\delta(q - g_{\parallel})$  — дельта-функция. Подставляя (48.4) в (48.2), находим, что

$$\frac{1}{s} \frac{d\mathcal{E}(x)}{d\omega} = \frac{2e^2 \delta}{m^2 \Delta} \sum_{g_y, g_z} g_{\parallel}^{-2} \left[ 1 - 2 \frac{\delta}{g_{\parallel}} \left( 1 - \frac{\delta}{g_{\parallel}} \right) \right] f(x), \quad (48.5)$$

где

$$f(x) = \left( \frac{d}{dx} V(x) \right)^2 + g_y^2 V^2(x), \quad V(x) = \sum_{g_x} u_g e^{-ixg_x}. \quad (48.6)$$

Таким образом с учетом неоднородности распределения потенциала в плоскости среднее значение спектральной плоскости излучения имеет следующий вид:

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \frac{2e^2 \delta}{m^2 \Delta^2 a_3} \sum_{g_y, g_z} g_{\parallel}^{-2} \left[ 1 - 2 \frac{\delta}{g_{\parallel}} \times \right. \\ \left. \times \left( 1 - \frac{\delta}{g_{\parallel}} \right) \right] \int_0^{a_3} dx_0 \int_0^L d\tau f(x(\tau, x_0)), \quad (48.7)$$

причем  $g_{\parallel} = g_z + \psi g_y \geq \delta$ .

В интересующей нас области частот  $\omega \sim \gamma^2 \psi / a_2$  основной вклад в (48.7) дает слагаемое с  $g_z = 0$ . При этом если  $\theta \gg \theta_c$ , то  $x(\tau) \approx x_0 + \theta \tau$ . Формула (48.7) в этом случае дает соответствующий результат борновской теории когерентного излучения:

$$\frac{d\mathcal{E}_{\mathbf{B}}}{d\omega} = \frac{e^2 \delta L}{\pi m^2 \psi^2 d} \sum_{g_x \geq \delta / \psi} \int dg_y \frac{g_{\parallel}^2}{g_x^2} \left[ 1 - \frac{2\delta}{\psi g_x} \left( 1 - \frac{\delta}{\psi g_x} \right) \right] |u_g|^2. \quad (48.8)$$

Из результатов борновской теории когерентного излучения вытекает, что при  $\omega \sim \gamma^2 \psi / a_2$  спектр излучения содержит резкие максимумы и высокую интенсивность излучения в максимумах. Покажем, как изменится этот результат при возникновении явлений плоскостного каналирования и надбарьерного движения частиц.

Рассмотрим с этой целью излучение ультрарелятивистских электронов и позитронов в случае, когда потенциал отдельного атома решетки представляет собой экранированный потенциал Кулона (7.5) и кристаллические плоскости достаточно далеко разнесены друг от друга, так что потенциалы соседних

плоскостей не перекрываются (для этого необходимо, чтобы выполнялось условие  $a_3 \gg R$ ). В этом случае, как можно показать [41], в интересующей нас области частот  $\omega \sim \gamma^2 \psi / a_2$  с точностью до членов порядка  $(\delta R / \psi)$  спектральная плотность излучения (48.7) только зависящим от  $\epsilon_{\perp} = 1/2 E \theta^2$  множителем отличается от соответствующего результата борновского приближения:

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle \approx G(\epsilon_{\perp}) \frac{d\mathcal{E}_B}{d\omega}, \quad (48.9)$$

$$G(\epsilon_{\perp}) = \frac{1}{LR} \int_0^{a_3} dx_0 \int_0^L d\tau \sum \exp(-2|x(\tau) - na_3| R^{-1}). \quad (48.10)$$

Интегрирование в (48.10) ведется вдоль пути, проходимо го частицей в кристалле вдоль оси  $x$ .

При  $\theta \gg \theta_c$  согласно (48.10),  $G(\epsilon_{\perp}) \approx 1$ .

На рис. 6.7 представлены результаты вычисления функций  $G(\theta/\theta_c)$  при произвольных значениях угла  $\theta$  в случае, когда

движение происходит в кристалле вольфрама вблизи плоскости (100). Сплошная линия относится к электронам, штриховая — к позитронам.

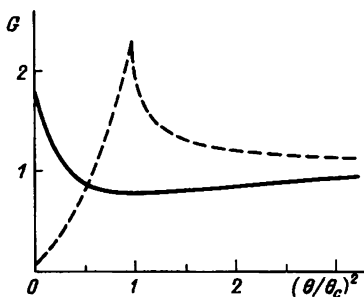


Рис. 6.7. График функции  $G(\theta/\theta_c)$ , определяющей влияние эффектов каналирования и надбарьерного движения позитронов (штриховая) и электронов (сплошная линия) на величину интенсивности излучения в области когерентного максимума

Полученные результаты показывают, что в области частот  $\omega \sim \gamma^2 \psi / a_2$  положения максимумов в спектре излучения частиц при плоскостном каналировании и надбарьерном движении совпадают с положениями максимумов, даваемыми формулами борновского приближения. Величина же интенсивности излучения в максимумах при каналировании и надбарьерном движении существенно отличается от интенсивности излучения в случае, когда эти явления отсутствуют.

Представленные графики показывают, что при каналировании интенсивность излучения позитронов в когерентных максимумах должна быть много меньше интенсивного излучения в максимумах в случае, когда каналирование отсутствует. Этот эффект обусловлен тем, что при каналировании позитроны не подходят на близкие расстояния к цепочкам атомов кристалла, где градиенты потенциала решетки максимальны и, следовательно, излучение частиц велико.

При  $\theta \geq \theta_c$  для позитронов  $G(\varepsilon_{\perp}) > 1$ . Связано это с тем, что надбарьерные частицы в этом случае «зависают» в области с большим градиентом потенциала цепочек атомов кристалла, находящихся в плоскости, т. е. проводят большую часть времени в этой области, чем при прямолинейном движении, когда  $x(\tau) = x_0 + \theta\tau$ .

Надбарьерные электроны при  $\theta$ , близких к  $\theta_c$ , «зависают» при движении в кристалле между кристаллическими плоскостями, т. е. в области, где градиенты потенциала решетки минимальны, поэтому для таких частиц  $G(\varepsilon_{\perp}) < 1$ . При  $\theta < \theta_c$  наряду с надбарьерными появляются каналированные электроны. Последние движутся в области с большим градиентом потенциала, поэтому их излучение велико. В частности, при  $\theta = 0$  все электроны являются каналированными; в этом случае  $G(\varepsilon_{\perp}) > 1$ .

В заключение этого параграфа отметим, что аналогичные закономерности должны проявляться и в ориентационной зависимости выхода неупругих процессов, обусловленных малыми прицельными параметрами (ядерные реакции, рассеяние на большие углы и т. п.), при прохождении через кристалл заряженных частиц высоких энергий под малыми углами к кристаллографическим плоскостям.

## ИЗЛУЧЕНИЕ ФОТОНОВ ПРИ ДВИЖЕНИИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ВБЛИЗИ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКОЙ ОСИ

### § 49. Излучение релятивистских электронов и позитронов в поле цепочки атомов кристалла

В настоящей главе будет рассмотрено излучение фотонов при движении заряженных частиц вдоль кристаллографической оси. Этот вопрос частично рассматривался в § 29 и в § 48. В первом из этих параграфов исследовано когерентное излучение релятивистских электронов в кристалле в борновском приближении квантовой электродинамики. При этом показано, что результаты, полученные в борновском приближении, справедливы, если выполняются неравенства  $\psi \gg \psi_c$  и  $\theta \gg \theta_c$ , т. е. если движение частицы в кристалле происходит под углами, значительно превосходящими критические углы осевого и плоскостного каналирования (определение углов  $\psi$  и  $\theta$  дано на рис. 4.1). Кроме того, предполагалось выполненным условие дипольности излучения частицы в кристалле, и, наконец, не учитывалось влияние многократного рассеяния и поляризации среды на излучение. В § 48 было исследовано влияние плоскостного каналирования и надбарьерного движения на когерентное излучение быстрой частицей в кристалле в предположении, что движение происходит под малым углом к кристаллической оси. Частица в этом случае последовательно сталкивается с различными цепочками атомов, расположенными в плоскости, причем эти столкновения являются регулярными (см. рис. 6.6). Теперь мы отбросим ограничения, использованные в § 29 и в § 48.

Рассмотрим прежде всего, как изменяется характер излучения релятивистских электронов и позитронов в кристалле с уменьшением угла  $\psi$  падения частиц по отношению к кристаллографической оси (оси  $z$ ). При нахождении интенсивности излучения будем пользоваться классической электродинамикой. Начнем с рассмотрения излучения надбарьерных частиц, т. е. частиц, совершающих инфинитное движение в плоскости, ортогональной оси  $z$  [1, 2].

Надбарьерная частица при движении в кристалле под малым углом к кристаллографической оси последовательно сталкивается с различными цепочками атомов, расположенными параллельно оси  $z$ . Эти столкновения в дальнейшем мы будем считать случайными. При этом, если длина когерент-

тности  $l_c$  будет велика по сравнению с постоянной решетки, то для излучения несущественна неоднородность потенциала кристалла вдоль оси  $z$ . Для описания движения и излучения частицы в кристалле в этих условиях можно пользоваться приближением непрерывной цепочки (см. § 35). Если, кроме того, длина  $l_c$  будет мала по сравнению с длиной свободного пробега частицы в кристалле между последовательными столкновениями с различными цепочками атомов, то излучение будет определяться только особенностями взаимодействия частицы с полем непрерывного потенциала отдельной цепочки атомов. Для простоты будем считать, что непрерывный потенциал цепочки в пределах элементарной ячейки в плоскости, ортогональной оси цепочки, является цилиндрически-симметричным.

Спектральная плотность излучения в рассматриваемом случае определяется траекторией частицы в поле непрерывного потенциала цепочки (38.2), которая, в свою очередь, зависит от модуля прицельного параметра цепочки  $|b|$ , т. е. от расстояния между осью цепочки и проекцией траектории падающей частицы на плоскость ортогональную оси  $z$ . По этому прицельному параметру спектральная плотность излучения  $d\mathcal{E}(b)/d\omega$  должна быть, очевидно, усреднена с вероятностью  $db/\bar{a}$ , где  $\bar{a}$  — среднее расстояние между цепочками и  $|b| \leq \bar{a}/2$ . Так как частица при прохождении через кристалл взаимодействует с  $L\psi/\bar{a}$  цепочками атомов, то для среднего значения спектральной плотности излучения мы получим выражение

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = L\psi na_1 \int_{-\infty}^{+\infty} db \frac{d\mathcal{E}(b)}{d\omega}. \quad (49.1)$$

Мы воспользовались здесь тем, что  $\bar{a}^2 = 1/na_1$ , и учли, что функция  $d\mathcal{E}(b)/d\omega$  быстро убывает с ростом  $|b|$ .

В дипольном приближении спектральная плотность излучения, согласно (5.2), определяется квадратом фурье-компоненты ускорения в поле непрерывного потенциала цепочки:

$$|W(q)|^2 = \left| \int dt \dot{p}(t) \exp(iqt) \right|^2 = |W_x|^2 + |W_y|^2.$$

Воспользовавшись уравнением (35.7) и формулой (38.2), имеем

$$W_x = \frac{2}{E} \int_0^{\infty} dt \frac{x}{\rho} \frac{dU_r(\rho)}{d\rho} \cos qt(\rho), \quad W_y = \frac{2}{E} \int_0^{\infty} dt \frac{y}{\rho} \frac{dU_r(\rho)}{d\rho} \sin qt(\rho) \quad (49.2)$$

(плоскость  $(x, y)$  расположена перпендикулярно оси цепочки, ось  $x$  здесь — ось симметрии траектории — рис. 7.1). Так как

$$\frac{x}{\rho} = \cos \varphi_*(\rho), \quad \frac{y}{\rho} = \sin \varphi_*(\rho), \quad dt = \frac{d\rho}{\dot{\rho}},$$

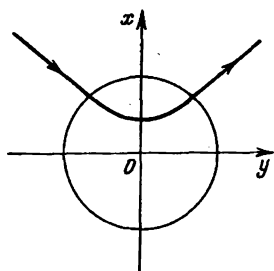


Рис. 7.1. Ориентация декартовых осей  $x$  и  $y$  относительно импульса падающей частицы в плоскости, ортогональной оси цепочки

где

$$\varphi_*(\rho) = b\psi \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho^2 \dot{\rho}}, \quad \dot{\rho} = \psi \sqrt{1 - \frac{U_r(\rho)}{\varepsilon_1} - \frac{b^2}{\rho^2}},$$

то окончательная формула для  $\langle d\mathcal{E}/d\omega \rangle$  в дипольном приближении имеет вид

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = L \frac{8e^2 n a_1 \delta}{\pi m^2 \psi} \times \int_{\delta}^{\infty} \frac{dq}{q^2} \left[ 1 - 2 \frac{\delta}{q} \left( 1 - \frac{\delta}{q} \right) \right] \int_0^{\infty} db (A^2 + B^2). \quad (49.3)$$

Здесь

$$A = \psi \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{d\rho}{\dot{\rho}} \frac{dU_r}{d\rho} \cos \varphi_* \cos qt, \quad B = \psi \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{d\rho}{\dot{\rho}} \frac{dU_r}{d\rho} \sin \varphi_* \sin qt.$$

Формула (49.3) показывает, что величина  $\langle d\mathcal{E}/d\omega \rangle$  зависит от знака заряда частицы и от соотношения между  $\psi$  и  $\psi_c$ . При  $\psi \gg \psi_c$  в этой формуле может быть выполнено разложение по потенциалу  $U_r/\varepsilon_1 \sim (\psi_c/\psi)^2$ . В первом приближении такого разложения находим, что

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = L \frac{e^2 n a_1 \delta}{2\pi^2 m^2 \psi^2} \int_{\delta/\psi}^{\infty} dq_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dq_2 \frac{q_1^2 + q_2^2}{q_1^2} \left[ 1 - \frac{2\delta}{\psi q_1} \left( 1 - \frac{\delta}{\psi q_1} \right) \right] |U_q|^2, \quad (49.4)$$

где  $U_q$  — фурье-компонента потенциальной энергии  $U_r(\rho)$ , а  $q_1$  и  $q_2$  — компоненты вектора  $\mathbf{q}$ , параллельная и ортогональная составляющей импульса падающей частицы в плоскости  $(x, y)$ . Излучение электронов и позитронов на цепочке атомов кристалла в этом случае одинаково.

Используя соотношение

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = L n \omega N_0^{-1} \frac{d\sigma}{d\omega},$$

можно перейти к сечению излучения частицы в кристалле. При этом, как легко проверить, формула (49.4) приводит к сечению когерентного излучения в борновском приближении (29.5), если в последнем пренебречь отдачей при излучении.

Случай  $\psi \gg \psi_c$  соответствует почти прямолинейной траектории. Если же  $\psi \lesssim \psi_c$ , то необходим учет влияния на излучение искривления траектории частицы в поле цепочки атомов.

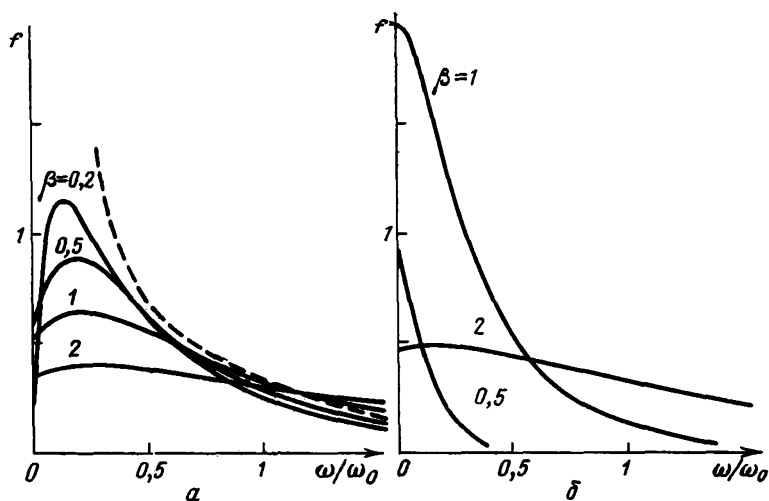


Рис. 7.2. Спектры излучения надбарьерных электронов (а) и позитронов (б), движущихся в кристалле кремния под различными углами к оси  $\langle 111 \rangle$ ; штриховая линия — спектр, определяемый формулой (51.4);  $\beta = \psi/\psi_c$ ; температура кристалла предполагается комнатной

Спектр излучения  $\langle d\mathcal{E}/d\omega \rangle$  в этом случае может быть найден численными методами по формуле (49.3).

На рис. 7.2 представлены результаты вычисления спектральной плотности излучения электронов (а) и позитронов (б), движущихся в кристалле кремния вблизи кристаллографической оси  $\langle 111 \rangle$ . По оси ординат на этом рисунке отложена величина  $f = (LD)^{-1} \langle d\mathcal{E}/d\omega \rangle$ , а по оси абсцисс — величина  $\omega/\omega_0$ , где  $D = 4e^2 ndRU_0^2/\pi m^2 \psi_c$ ,  $U_0 = 2Ze^2/d$  и  $\omega_0 = 2\gamma^2 \psi_c/R$ . Цифры у кривых соответствуют значениям  $\beta = \psi/\psi_c$ , для которых проводились вычисления.

Результаты вычислений показывают, что для надбарьерных позитронов величина  $\langle d\mathcal{E}/d\omega \rangle$  является монотонной функцией частоты и что интенсивность излучения позитронов максимальна при  $\psi \sim \psi_c$ . Резкое уменьшение интенсивности излучения при  $\psi \ll \psi_c$  по сравнению со случаем  $\psi \sim \psi_c$  обусловлено тем, что при  $\psi < \psi_c$  позитроны не подходят на близкие расстояния к оси цепочки, где градиенты непрерывного потенциала максимальны.

Спектр же излучения надбарьерных электронов при  $\psi < \psi_c$  содержит максимум в области частот  $\omega \sim \frac{1}{3} \omega_0$ . С ростом энергии  $E$  положение этого максимума изменяется по закону

$$\omega_{\max} \sim E^{3/2}. \quad (49.5)$$

Сравнивая по порядку величины найденную величину  $\langle d\mathcal{E}/d\omega \rangle$  со спектральной плотностью излучения электронов в аморфной среде (18.5), находим, что при  $\psi \lesssim \psi_c$  спектральная плотность излучения надбарьерных электронов в максимуме по порядку



величины превосходит (18.5) в  $R/\psi a_1 \ln(183Z^{-1/3})$  раз. Этот параметр имеет простой физический смысл — он определяет порядок величины числа атомов цепочки, с которыми эффективно взаимодействует частица.

Покажем теперь, что физическая причина возникновения максимума в спектре излучения надбарьерных электронов связана с особенностями рассеяния этих частиц на цепочке атомов в области малых прицельных параметров [3, 4].

Действительно, согласно (5.2), величина  $d\mathcal{E}(b)/d\omega$  пропорциональна квадрату угла рассеяния частицы  $\mathcal{D}_l^2$  на длине формирования излучения  $l$ :

$$\frac{d\mathcal{E}(b)}{d\omega} \sim e^2 \gamma^2 \mathcal{D}_l^2. \quad (49.6)$$

Так как основной вклад в (49.1) дает область малых прицельных параметров  $|b| \lesssim R$ , то при анализе спектра излучения требуется знать зависимость  $\mathcal{D}_l$  от  $l$  при  $|b| \lesssim R$ .

В области достаточно малых частот, когда длина когерентности  $l$  значительно превышает длину пути  $s \sim 2R/\psi_c$ , на которой на электрон действует поле цепочки, величина  $\mathcal{D}_l$  равна полному углу рассеяния частицы цепочкой  $\mathcal{D}_l = \mathcal{D}(b)$ . Приведенные на рис. 5.14 графики показывают, что при  $\psi \lesssim \psi_c$  в области  $|b| \lesssim R$  функция отклонения  $\varphi(b)$  быстро уменьшается с уменьшением  $|b|$  и, следовательно, в этой области частот  $\mathcal{D}_l \approx \mathcal{D}(b) \ll \psi_c$ .

На расстоянии наибольшего сближения электрона с осью цепочки угол, на который отклоняется электрон относительно начального импульса, по порядку величины равен  $\psi_c$  (это следует непосредственно из закона сохранения поперечной энергии (35.10)). Длина пути, проходимого электроном, при этом будет порядка  $R/\psi_c$ . Поэтому в области частот, удовлетворяющей условию  $l \sim R/\psi_c$ , имеем  $\mathcal{D}_l \sim \psi_c$ .

Если же  $l \ll R/\psi_c$ , то очевидно, что  $\mathcal{D}_l \ll \psi_c$ .

Таким образом, величина  $\mathcal{D}_l^2$ , а вместе с нею и спектральная плотность излучения (49.6) имеют максимум при  $l \sim R/\psi_c$ , что соответствует области частот  $\omega \sim \omega_0$ .

Полученные результаты показывают, что при хаотическом движении частицы в плоскости, ортогональной кристаллографической оси  $z$ , в отличие от случая регулярного движения в этой плоскости, рассмотренного в § 48, спектр излучения является плавной функцией частоты. Характер излучения в этом случае определяется особенностями взаимодействия частицы с полем отдельной цепочки атомов. При этом особый характер движения частицы в поле цепочки атомов существенно сказывается на ее излучении. Так, корреляции между столкновениями электрона с атомами, образующими цепочку, приводят к увеличению средних углов рассеяния частицы в кристалле (см. § 40) в сравнении с рассеянием в аморфной среде, что в свою

очередь приводит к усилению излучения электрона в кристалле в области малых частот по сравнению с излучением в аморфной среде. Отметим также, что при  $\psi \gg \psi_c$  асимметрия в рассеянии электрона в поле цепочки атомов (рассеяние происходит, в основном, вдоль азимутального угла  $\phi$ ) приводит к линейной поляризации излучения [5]. В частности, оказывается [5, 6], что в области частот, удовлетворяющей условию  $l_c \gg 2R/\psi$ , эта поляризация составляет 50%.

Таким образом, в случае, когда столкновения частицы с цепочками атомов можно рассматривать как случайные, формулы, определяющие излучение в кристалле электронов и позитронов, существенно упрощаются по сравнению со случаем, когда столкновения с цепочками атомов являются регулярными. При этом удастся связать величины, определяющие рассеяние и излучение быстрой частицы в кристалле.

Подчеркнем, что все эти результаты справедливы, если частица является надбарьерной и выполняется условие дипольности излучения. Напомним, что формула (29.3) для сечения излучения относилась к случаю, когда  $\psi \gg \psi_c$ ; в формуле же (49.3) соотношение между углами  $\psi$  и  $\psi_c$  может быть произвольным.

## § 50. Излучение при аксиальном каналировании ультрарелятивистских электронов

При падении пучка электронов на кристалл под малым углом к кристаллографической оси возможно явление каналирования, при котором частицы движутся в каналах, образованных цепочками атомов кристалла. Это явление имеет место, если угол  $\psi$  между падающим пучком и кристаллографической осью (осью  $z$ ) мал по сравнению с критическим углом осевого каналирования  $\psi_c$ . Часть частиц из падающего пучка в этом случае захватываются в режим каналирования, при котором электроны совершают движение типа винтового в поле непрерывного потенциала цепочки атомов, расположенных параллельно оси  $z$ . Каналированные частицы, так же как и надбарьерные, движутся в интенсивном среднем поле цепочек атомов кристалла, поэтому такие частицы должны интенсивно излучать [7]. Характер движения каналированной частицы, однако, отличается от характера движения надбарьерной частицы в поле цепочки атомов, поэтому и спектры излучения этих частиц должны различаться. Выясним основные закономерности излучения в кристалле аксиально каналированных электронов и сравним их с закономерностями излучения надбарьерных электронов. Так же как и в предыдущем параграфе, мы будем пользоваться классической электродинамикой и предполагать выполненным условие дипольности излучения частицы в поле цепочки атомов.

Спектральная плотность излучения каналированного электрона в дипольном приближении классической электродинамики определяется формулой (5.2), в которой следует положить

$$W(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \ddot{\rho}(t) e^{iqt}, \quad (5.1)$$

где  $\rho(t)$  — траектория каналированного электрона в плоскости, ортогональной оси канала.

Траектория каналированного электрона зависит от точки влета частицы в кристалл  $\rho_0$ , поэтому формула (5.2) должна быть усреднена по  $\rho_0$ . При этом если падающий пучок является параллельным, то среднее значение спектральной плотности излучения каналированных электронов будет иметь вид

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle_c = \frac{1}{S} \int_{\rho_c} d^2 \rho_0 \frac{d\mathcal{E}(\rho_0)}{d\omega}, \quad (5.2)$$

где  $S$  — площадь элементарной ячейки в поперечной плоскости. Интегрирование в (5.2) ведется по площадке  $S_c$ , попав в которую, электрон будет совершать финитное движение в поле цепочки. Эта площадка ограничена линией, определяемой из условия  $\epsilon_{\perp} = U_r(\rho_c)$ , где  $\epsilon_{\perp}$  — поперечная энергия и  $U_r(\rho)$  — потенциальная энергия взаимодействия электрона с полем цепочки атомов. Величина  $S_c/S$  представляет собой долю частиц падающего пучка, захваченных в канал при входе частиц в кристалл.

Выполнив в (5.1) дважды интегрирование по времени по частям, получим

$$W(q) = -q^2 \rho_q, \quad \rho_q = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \rho(t) e^{iqt}. \quad (5.3)$$

Подставляя это выражение в (5.2), получим следующее выражение для спектральной плотности излучения:

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \frac{e^2 \omega}{2\pi} \int_{\delta}^{\infty} dq q^2 \left[ 1 - 2 \frac{\delta}{q} \left( 1 - \frac{\delta}{q} \right) \right] |\rho_q|^2. \quad (5.4)$$

В рассматриваемой задаче удобно перейти от декартовых координат  $x$  и  $y$ , определяющих траекторию электрона в поперечной плоскости, к переменным  $\rho(t)$  и  $\varphi(t)$ , определяющим расстояние от частицы до оси цепочки в момент времени  $t$  и азимутальный угол поворота электрона в поле цепочки к этому моменту времени (см. (37.3)). Эти переменные связаны соотношениями

$$x(t) = \rho(t) \cos \varphi(t), \quad y(t) = \rho(t) \sin \varphi(t). \quad (5.5)$$

При движении электрона в поле, обладающем цилиндрической симметрией, сохраняются энергия поперечного движения  $\epsilon_{\perp}$  и момент количества движения  $M$  относительно оси цепочки. При этом, как показано в § 37, величина  $\rho(t)$  является периодической функцией времени, т. е.  $\rho(t+T)=\rho(t)$ ; здесь  $T$ —период, определяемый формулой (37.4). Азимутальный же угол  $\varphi(t)$  вследствие прецессии орбиты, вообще говоря, не является периодической функцией времени. Для этого угла выполняется соотношение

$$\varphi(t+T)=\varphi(t)+\Delta\varphi, \quad (50.6)$$

где  $\Delta\varphi$ —угол прецессии орбиты (37.5).

Воспользовавшись периодичностью функции  $\rho(t)$  и соотношением (50.6), интегрирование по всему времени в (50.3) можно свести к интегрированию по периоду радиальных колебаний. При этом как легко проверить, фурье-компонента координаты  $x(t)$  имеет вид

$$x_q = \int_{-\infty}^{+\infty} dt x(t) e^{iqt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{iqTn} \int_0^T dt \rho(t) \cos(\varphi(t) + n\Delta\varphi) e^{iqt}.$$

Замечая, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ian} = 2\pi \sum_{\nu} (\delta - 2\pi\nu),$$

где  $\delta(a)$ —дельта-функция, приходим к следующему выражению для  $x_q$ :

$$x_q = \frac{1}{2} \omega_p \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \int_0^T dt \rho(t) e^{iqt} \{ e^{i\varphi(t)} \delta(q - (\nu\omega_p - \Omega)) + e^{-i\varphi(t)} \delta(q - (\nu\omega_p + \Omega)) \}, \quad (50.7)$$

где  $\Omega = \Delta\varphi/T$  и  $\omega_p = 2\pi/T$ .

Квадрат модуля этого выражения, очевидно, равен

$$|x_q|^2 = \frac{1}{4} N \omega_p \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left\{ \delta(q - (\nu\omega_p - \Omega)) \left| \int_0^T dt e^{iqt} (x + iy) \right|^2 + \delta(q - (\nu\omega_p + \Omega)) \left| \int_0^T dt e^{iqt} (x - iy) \right|^2 \right\}, \quad (50.8)$$

где  $N$ —число колебаний электрона в канале. Мы воспользовались здесь тем, что

$$\frac{2\pi}{T} \left| \delta(q - (\nu\omega_p \pm \Omega)) \right|^2 = N \delta(q - (\nu\omega_p \pm \Omega)).$$

С помощью аналогичных преобразований можно показать, что

$$|x_q|^2 = |y_q|^2.$$

Подставляя полученные соотношения для фурье-компонент координат в (50.4), приходим к следующей формуле для отнесенной к единице длины спектральной плотности излучения [8, 9]:

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{ds d\omega} = \frac{e^2 \omega}{2T^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \omega_+^2 |\rho_+|^2 f\left(\frac{\delta}{\omega_+}\right) + \omega_-^2 |\rho_-|^2 f\left(\frac{\delta}{\omega_-}\right) \right\}, \quad (50.9)$$

где  $\omega_{\pm} = n\omega_p \pm \Omega$ ,  $f = (1 - 2\xi + 2\xi^2) \Theta(1 - \xi)$ ,  $\Theta(1 - \xi)$  — ступенчатая функция (2.9) и

$$\rho_{\pm} = \int_0^T dt e^{i\omega_{\pm} t} (x(t) \mp iy(t)).$$

Формула (50.9) показывает, что в дипольном приближении для каждой гармоники с  $n \neq 0$  возникает дублетная структура спектра излучения с расщеплением

$$\Delta\omega = 4\Omega \frac{E^2}{m^2}. \quad (50.10)$$

Это расщепление связано с прецессией орбиты электрона в поле  $U_r(\rho)$ .

Для плоских траекторий каналированных электронов, соответствующих нулевым орбитальным моментам  $M=0$ , угол прецессии орбиты равен  $\Delta\phi = \pi$ . В этом случае  $\omega_{\pm} = \omega_p(2n \mp 1)$  где  $\omega_p = 1/2 \omega_p$  — частота одномерных колебаний,  $T_p = 2T$ , и спектральная плотность излучения (50.9) приобретает вид

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{ds d\omega} = \frac{4e^2 \omega}{T_p} \omega_p^2 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) |\rho_p|^2 f\left(\frac{\delta}{(2n+1)\omega_p}\right), \quad (50.11)$$

$$\rho_p = \int_0^{T_p/2} dt e^{i\omega_p(2n+1)t} (x(t) + iy(t)).$$

Мы видим, что в случае плоских траекторий излучение происходит на нечетных гармониках, как это и должно быть при одномерных колебаниях электрона в симметричной потенциальной яме (см. § 44).

В общем случае прецессирующих орбит, когда  $M \neq 0$ , спектральная плотность излучения (50.9) может быть найдена численными методами. На рис. 7.3 представлены типичные траектории каналированных электронов, соответствующие различным значениям момента количества движения  $M$ , и спектры излучения, соответствующие этим траекториям. Вычисления проводились применительно к случаю движения электрона в кристалле кремния вдоль оси  $\langle 111 \rangle$ . В качестве непрерывного потенциала цепочки в вычислениях использована функция вида (35.18). По оси ординат на рис. 7.3 отложена величина  $F$ ,

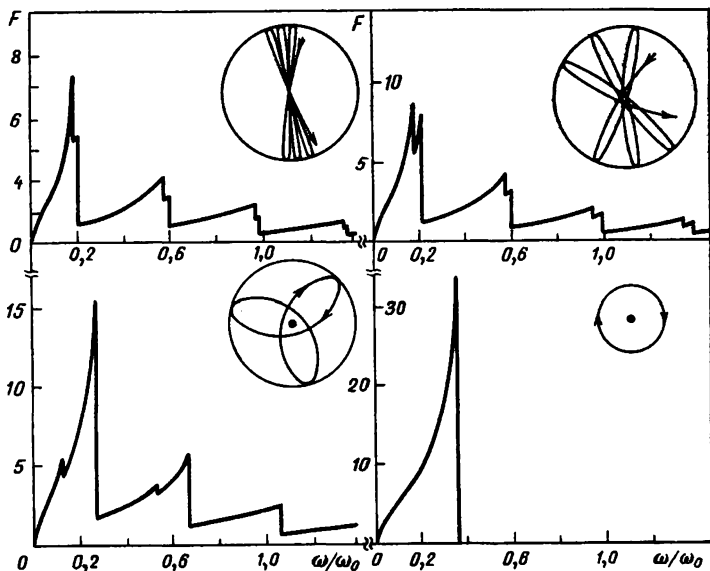


Рис. 7.3. Типичные траектории каналированных электронов с  $\epsilon_{\perp} = -0,1 U_0$ , движущихся в кристалле кремния вдоль оси  $\langle 111 \rangle$  с различными моментами относительно оси цепочки, и спектры излучения, соответствующие этим траекториям

связанная со спектральной плотностью излучения (50.9) соотношением

$$F = \frac{1}{D} \frac{d^2 \mathcal{E}}{ds d\omega},$$

а по оси абсцисс — величина  $\omega/\omega_0$ . Входящие в эти формулы константы  $D$  и  $\omega_0$  определены в предыдущем параграфе.

Приведенные графики показывают, что при одномерном движении, когда  $M=0$ ,  $\Delta\varphi=\pi$  и максимальная интенсивность излучения приходится на частоту  $\omega = \gamma^2 \omega_p$ . С увеличением момента  $M$  интенсивность излучения на нулевой гармонике уменьшается. При этом максимумы спектральных распределений излучения, соответствующие различным значениям  $n$ , расщепляются. Если же движение происходит по замкнутой орбите (см. рис. 7.3), то прецессия орбиты отсутствует. Соответствует при этом и расщепление максимумов интенсивности излучения. Максимальная интенсивность в этом случае приходится на частоту  $\omega = 2\gamma^2 \omega_p$ .

В поле вида\*  $U_1(\rho) = \alpha/\rho$  движение каналированного электрона происходит по эллиптическим траекториям. Интег-

\* С помощью функции такого вида достигается хорошая аппроксимация непрерывного потенциала цепочки атомов при  $\rho \sim R$ ; на малых же расстояниях от оси  $\rho \lesssim \sqrt{u^2}$  эта функция дает существенно завышенный результат для потенциала цепочки.

рирование по времени в этом случае в формуле (50.9) может быть выполнено аналитически. При этом спектральная плотность излучения каналированного электрона\*) на единице длины приобретает вид [10, 11]

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{ds d\omega} = e^2 \omega \bar{\omega}^2 a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (J'_n(ne))^2 + \frac{1-e^2}{e^2} J_n^2(ne) \right] f\left(\frac{\delta}{n\bar{\omega}}\right); \quad (50.12)$$

где величина  $a = \alpha/2|\varepsilon_{\perp}|$  — большая полуось эллипса,  $e = (1 - 2|\varepsilon_{\perp}|M^2/\alpha^2 E)^{1/2}$  — эксцентриситет орбиты,  $M$  — момент,  $\bar{\omega} = 2\pi/T_1$  и  $T_1$  — период движения по эллиптической орбите:  $T_1 = 2\pi\alpha \sqrt{E/(2|\varepsilon_{\perp}|)^{3/2}}$ .

Сравнение спектра излучения (50.9) каналированного электрона, полученного с учетом прецессии поперечной орбиты, с аналогичным спектром (50.12), в котором прецессия не учитывается, показывает ряд отличий между ними. Эти отличия наиболее заметно проявляются при относительно малых орбитальных моментах  $M$ . В частности, учет прецессии приводит к расщеплению максимумов интенсивности излучения, что в целом приводит к уширению спектра и уменьшению интенсивности излучения в максимумах по сравнению со случаем, когда расщепление отсутствует. Кроме того, анализ поведения спектральной плотности излучения при  $M=0$  и больших значениях  $n$  показывает, что эта величина падает обратно пропорционально кубу номера излучаемой гармоники (см. (44.5a)). В то же время, согласно (50.12), без учета прецессии такое падение должно происходить гораздо более медленно из-за соответствующего поведения функции Бесселя  $J_n(ne)$ . Таким образом, более точный учет поведения потенциала цепочки атомов на малых расстояниях от оси приводит к изменению спектра излучения в области как малых, так и больших частот.

При изучении спектральных характеристик излучения от пучка каналированных электронов полученные выше спектры необходимо усреднить по всевозможным траекториям электронов. Такое усреднение проводится с функцией распределения  $f(\varepsilon_{\perp}, M, s)$  по поперечным энергиям и моментам на глубине  $s$  проникновения частиц в кристалл. Если пренебречь изменением функции распределения с глубиной  $s$ , то распределение частиц по  $\varepsilon_{\perp}$  и  $M$  будет определяться только точками влета частиц в кристалл  $\rho_0$  и ориентацией кристаллографической оси относительно падающего пучка. Связь между переменными  $\varepsilon_{\perp}$ ,  $M$  и  $\rho_0 = (x_0, b)$  в этих условиях определяется соотношениями

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{1}{2} E\psi^2 + U_r(\rho_0), \quad M = E\psi b.$$

\*) Спектральные плотности излучения надбарьерных электронов, движущихся в поле вида  $\alpha/\rho$ , были получены в работах [12, 13].

Рассмотрим в качестве примера излучение электронов при падении пучка на кристалл кремния под малым углом  $\psi \lesssim \psi_c$  к оси  $\langle 111 \rangle$ . Спектральная плотность излучения каналированных электронов в этом случае представлена на рис. 7.4 [14]. Вычисления выполнены по формулам (50.2) и (50.9) с использованием аппроксимации непрерывного потенциала цепочки функцией вида (35.18). По оси ординат на этом рисунке отложена функция

$$f_c = \frac{1}{D} \frac{d^2 \mathcal{E}}{ds d\omega},$$

а по оси абсцисс — величина  $\omega/\omega_0$ .

Цифры у кривых соответствуют значениям  $\beta = \psi/\psi_c$ , для которых проводились вычисления.

Заметим, что согласно представленному на рис. 5.10 графику при  $\beta = 0,2$  и  $0,5$  доля частиц  $\Phi_c$  из падающего пучка, захваченных в канал, равна соответственно  $0,44$  и  $0,1$ . Спектральные распределения излучения рис. 7.4 соответствуют вкладу в излучение только доли частиц из падающего пучка, захваченных в канал.

Представленные графики показывают, что усреднение приводит к сглаживанию результирующего спектра излучения, несмотря на то, что спектр излучения от отдельных электронов имеет немонотонный характер (см. рис. 7.3).

Отметим, что если рассматривать излучение каналированных электронов, движущихся в поле вида  $\alpha/\rho$ , то спектральная плотность излучения (50.12), усредненная с помощью соотношения (50.2), расходится. Эта расходимость связана с сингулярным поведением потенциала  $\alpha/\rho$  на малых расстояниях от оси. В действительности, однако, как показывают графики рис. 7.4, никакой расходимости спектральной плотности излучения нет, ибо реальный потенциал цепочки на малых расстояниях от оси конечен.

Сравним теперь основные величины, определяющие спектры излучения электронов, движущихся в кристалле в условиях аксиального каналирования и надбарьерного движения.

Из рис. 7.2 и 7.4 следует, что при  $\psi < \psi_c$  спектры излучения каналированных и надбарьерных электронов содержат максимумы в области малых частот  $\omega \sim (0,2 \div 0,5)\omega_0$ . Физические причины, приводящие к возникновению этих максимумов, однако, различны. Максимум при надбарьерном движении, как показано в § 49, обусловлен особенностями рассеяния электронов в области малых прицельных параметров, тогда

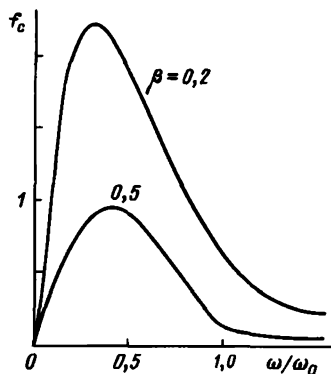


Рис. 7.4. Спектры излучения каналированных электронов при различных углах падения пучка на кристалл кремния по отношению к оси  $\langle 111 \rangle$



как максимум при каналировании обусловлен периодичностью движения частицы в канале.

Интенсивности излучения каналированных и надбарьерных частиц в области максимума спектральной плотности (см. рис. 7.2 и 7.4) существенно различаются. А именно, оказывается, что вклад, вносимый каналированными частицами, может быть сравнимым, и даже большим чем вклад, вносимый надбарьерными частицами. При этом, однако, доля частиц, захваченных в канал, может быть малой по сравнению с долей частиц, совершающих надбарьерное движение.

Таким образом, при уменьшении угла  $\psi$  падения пучка электронов на кристалл по отношению к кристаллографической оси, начиная с углов  $\psi \lesssim \psi_c$ , спектральная плотность излучения в области малых частот должна резко возрасти по сравнению со случаем, когда  $\psi > \psi_c$  и явление каналирования электронов отсутствует.

Этот результат иллюстрирует рис. 7.5, на котором представлена спектральная плотность излучения пучка электронов, включающая вклад в излучение как каналированных, так и надбарьерных частиц [14]:

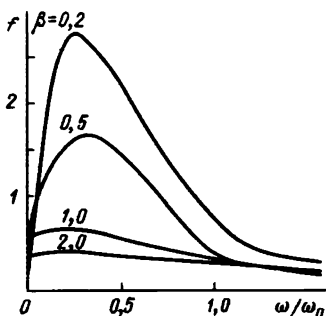


Рис. 7.5. Зависимость суммарного спектра излучения каналированных и надбарьерных электронов от ориентации оси  $\langle 111 \rangle$  кристалла кремния относительно падающего пучка

формулами (50.2) и (49.3). Приведенные графики относятся к различным значениям углов падения  $\psi$  пучка частиц на кристалл по отношению к одной из его осей\*).

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle_c + (1 - \Phi_c(\psi)) \left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle_u, \quad (50.13)$$

где  $\Phi_c(\psi)$  — доля частиц, захваченных в канал при входе в кристалл, а  $\langle d\mathcal{E}/d\omega \rangle_c$  и  $\langle d\mathcal{E}/d\omega \rangle_u$  — спектры излучения каналированных и надбарьерных частиц, определяемые

## § 51. Учет недипольности излучения в области больших частот

В предыдущих параграфах мы считали излучение дипольным, т. е. предполагали выполненным условие  $\gamma\vartheta_1 \ll 1$ . Теперь рассмотрим излучение в том случае, когда это неравенство не выполняется.

\* Отмеченный рост спектральной плотности излучения при  $\psi \lesssim \psi_c$ , однако, экспериментально не наблюдался (см., например, работы [15—17]). Связано это, по-видимому, с тем, что эти эксперименты проводились с довольно толстыми кристаллами, в которых имеет место значительное перераспределение пучка частиц по поперечным энергиям и моментам, по сравнению с распределением частиц по этим величинам при входе пучка в кристалл.

Если  $\psi \sim \psi_c$ , то угол рассеяния частицы цепочкой по порядку величины равен критическому углу каналирования  $\vartheta \sim \psi_c$ , поэтому при достаточно больших  $E$  всегда может быть выполнено условие  $\gamma\vartheta \sim \gamma\psi_c \gg 1$ , при котором дипольное приближение несправедливо. В случае периодического движения частицы в поле непрерывного потенциала кристаллических плоскостей излучение в условиях, когда неравенство  $\gamma\vartheta \ll 1$  не выполняется, было рассмотрено в § 46. В настоящем параграфе мы рассмотрим этот же вопрос при движении частицы вблизи кристаллографической оси.

Рассмотрим вначале излучение надбарьерной частицы в области больших частот — частот, удовлетворяющих условиям  $2R/\psi \gg l \gg a$ . Кроме того, будем считать выполненным неравенство  $\gamma\psi_c \gg 1$ . Тогда изменение радиуса кривизны траектории частицы в пределах длины когерентности будет малым по сравнению с радиусом кривизны, и, следовательно, для нахождения входящей в (49.1) величины  $d\mathcal{E}(b)/d\omega$  в этом случае можно воспользоваться формулой (5.4). Заменяя в (5.4) интегрирование по  $t$  интегрированием по  $\rho$  с помощью соотношения  $dt = d\rho/\dot{\rho}$ , где  $\dot{\rho} = \psi \sqrt{1 - U_r/\varepsilon_{\perp} - b^2/\rho^2}$ , и используя уравнение

$$\dot{v}_{\perp} = -\frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial \rho} U_r(\rho),$$

определяющее траекторию частицы в поле цепочки атомов, запишем спектральную плотность излучения (5.4) в виде

$$\frac{d\mathcal{E}(b)}{d\omega} = -\frac{4e^2\omega}{\sqrt{\pi}\gamma^2} \int_0^{\infty} \frac{d\rho}{\dot{\rho}} \left\{ \frac{1}{u} \Phi'(u) + \frac{1}{2} \int_u^{\infty} dx \Phi(x) \right\} \Theta \left( 1 - \frac{U_r(\rho)}{\varepsilon_{\perp}} - \frac{b^2}{\rho^2} \right), \quad (51.1)$$

где  $u = |m\omega\gamma^{-2}(\partial U_r/\partial \rho)^{-1}|^{2/3}$  и  $\Theta(x)$  — ступенчатая функция (2.9). Подставив, далее, это выражение в (49.1), получим после интегрирования по прицельным параметрам  $b$  следующее выражение для спектральной плотности излучения [1]:

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \frac{4}{\sqrt{3}} e^2 L n d \delta \int_{\rho^*}^{\infty} \rho d\rho \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} dx K_{5/3}(x), \quad (51.2)$$

где

$$\omega_c = \frac{2\gamma^2}{3m} \left| \frac{\partial U_r}{\partial \rho} \right|,$$

$K_{5/3}(x)$  — функция (5.9). Входящая в (51.2) величина  $\rho^*$  зависит от знака заряда частицы: для электронов  $\rho^* = 0$ ; для позитронов эта величина определяется из условия  $\varepsilon_{\perp} = U_r(\rho^*)$ , если  $\varepsilon_{\perp} < U_r(0)$ , и  $\rho^* = 0$ , если  $\varepsilon_{\perp} > U_r(0)$ .

Формула (51.2) по своей структуре сходна со структурой формулы (5.8) для спектрального распределения магнитно-тормозного излучения быстрой частицы в постоянном внешнем магнитном поле. Связано это с тем, что при выводе (51.2) фактически предполагалось, что поле цепочки атомов в пределах длины формирования излучения можно считать постоянным (приближение постоянного поля). По этой причине можно сказать, что (51.2) представляет собой магнитно-тормозной предел формул теории излучения быстрых частиц в кристалле\*).

На рис. 7.6 представлены результаты вычислений спектральной плотности излучения электронов (51.2) в случае, когда частицы с энергией  $E=30$  ГэВ движутся в кристалле кремния вблизи кристаллографической оси  $\langle 111 \rangle$ . В вычислениях использована аппроксимация непрерывного потенциала цепочки функцией (35.18). На этом же рисунке штриховыми линиями представлены спектральные плотности излучения позитронов, найденные по формуле (51.2) при  $\psi = \psi_c$  и  $\psi = \frac{1}{2}\psi_c$ .

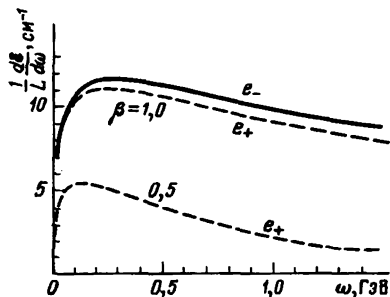


Рис. 7.6. Спектры излучения электронов ( $e_-$ ) и позитронов ( $e_+$ ) в области больших частот при больших значениях параметра недипольности излучения. Цифры у кривых соответствуют значениям  $\beta = \psi/\psi_c$ , для которых проводились вычисления

Полученные результаты показывают, что при выполнении условий  $2R/\psi \gg l \gg a$ ,  $\psi \lesssim \psi_c$ ,  $\gamma\psi_c \gg 1$  спектры излучения электронов и позитронов различны.

Для позитронов, согласно формуле (51.2), с уменьшением  $\psi$  интенсивность излучения уменьшается. Связано это с тем, что в этом случае частицы не подходят на близкие расстояния к оси цепочки, где градиенты непрерывного потенциала цепочки максимальны.

Для электронов спектральная плотность излучения (51.2) от  $\psi$  не зависит (от  $\psi$  зависит область применимости этой формулы:  $2R/\psi \gg l$ ). Электроны, в отличие от позитронов, при всех значениях угла  $\psi$  подходят на близкие расстояния к оси цепочки, где градиенты непрерывного потенциала цепочки максимальны, поэтому при всех значениях угла  $\psi$  электроны интенсивно излучают. Существенным при этом является то, что в области больших частот именно область малых значений  $\rho$  дает существенный вклад в излучение. Рассмотрим в этой

\*) Возможность применения формул теории магнитно-тормозного излучения к описанию излучения частиц высоких энергий в кристаллах была показана в работе [1]. Этот результат впоследствии был обобщен на случай процесса образования электронно-позитронной пары фотоном в кристалле [18—23] и на случай процесса излучения быстрой частицы в кристалле с учетом эффекта отдачи [23—27].

связи более подробно излучение ультрарелятивистских электронов на цепочке атомов кристалла в области больших частот.

В области частот  $\omega \sim \omega_c$  при  $\rho \sim R$  основной вклад в интеграл по  $\rho$  в (51.2) вносят значения  $R \gtrsim \rho \gtrsim \sqrt{u^2}$ . В этой области значений  $\rho$  непрерывный потенциал цепочки может быть аппроксимирован функцией вида

$$U_r(\rho) = U_3 \ln \left( \eta \frac{R}{\rho} \right). \quad (51.3)$$

При движении электронов в кристалле кремния, находящемся при температуре 293 К, вблизи оси  $\langle 111 \rangle$  хорошая аппроксимация достигается при  $U_3 = 38$  эВ и  $\eta = 3,57$ . Точность аппроксимации иллюстрирует рис. 5.3, на котором штрихпунктирной кривой представлена потенциальная энергия (51.3). В поле с таким распределением потенциала все входящие в (51.2) интегрирования могут быть выполнены аналитически. При этом [1]

$$\left\langle \frac{d\delta}{d\omega} \right\rangle = L \frac{2\pi e^2 n d U_3^2}{3m^2 \delta}. \quad (51.4)$$

Найденное выражение для спектральной плотности излучения указывает на ряд важных особенностей процесса излучения надбарьерных электронов на цепочке атомов кристалла в области частот  $\omega \sim 3\gamma^2 U_3 / 2mR$ . А именно, в этой области частот интенсивность излучения обратно пропорциональна частоте излученного фотона и не зависит от  $\psi$ . Существенным также является то, что формула (51.4) остается в силе не только при  $\gamma\psi_c \gg 1$ , но и в том случае, когда  $\gamma\psi_c \ll 1$ . Действительно, подставляя потенциальную энергию (51.3) в формулу (49.3) и замечая, что в интересующей нас области частот основной вклад в излучение вносят малые значения  $\rho$ , при которых в величинах  $\dot{\rho}$ ,  $\phi_*(\rho)$  и  $t(\rho)$  медленно меняющуюся функцию  $U_3 \ln(\eta R/\rho)$  можно заменить константой, получим после всех интегрирований формулу (51.4).

Соотношение между спектральной плотностью излучения (51.4) и точным значением спектральной плотности излучения надбарьерных электронов, найденным в дипольном приближении по формуле (49.3) для потенциальной энергии (35.18), иллюстрирует приведенный выше рис. 7.2, на котором представлена функция  $f$ , соответствующая спектру излучения (51.4).

Отметим, что формула (51.4) отличается от соответствующей формулы для аморфной среды (18.5) множителем  $k/\delta d$ , где  $k = \pi/8 \ln(183Z^{-1/3})$ . Входящая сюда величина  $(\delta d)^{-1}$  представляет собой число атомов на длине когерентности. Таким образом, мы видим, что как при  $\gamma\psi_c \gg 1$ , так и при  $\gamma\psi_c \ll 1$ , в области частот  $\omega \sim \omega_c$  рост излучения электронов в кристалле по сравнению с излучением в аморфной среде обусловлен когерентными эффектами при излучении.

Формула (51.2) справедлива, если энергия излученного кванта мала по сравнению с энергией частицы:  $\omega \ll E$ . Характерные значения частоты излученных волн быстрой частицей в поле непрерывного потенциала кристаллических осей, однако, быстро растут с увеличением энергии частицы,

$$\omega_{\text{eff}} \sim \omega_c \sim \frac{\gamma^2 U_0}{mR},$$

и при достаточно больших  $E$  неравенство  $\omega_{\text{eff}} \ll E$  нарушается. В этом случае необходим учет эффекта отдачи при излучении. Формулы, описывающие излучение быстрых частиц во внешнем поле с учетом эффекта отдачи, были получены в § 17. Этими формулами, очевидно, можно пользоваться и для описания излучения частиц в кристалле. При этом если изменение радиуса кривизны траектории частицы в пределах длины когерентности будет мало по сравнению с радиусом кривизны, то поле цепочки атомов в пределах длины когерентности  $l$  можно считать постоянным. Вероятность излучения, отнесенная к единице длины, в этом случае будет определяться формулой (17.6), в которой значение параметра  $\chi$  следует положить равным

$$\chi_r = \frac{\hbar E}{m^3} \left| \frac{dU_r}{dp} \right|. \quad (51.5)$$

Подставив формулу (17.6) в (49.1), получим после простых преобразований, аналогичных преобразованиям, которые были сделаны при выводе формулы (51.2), следующее выражение для среднего значения спектральной плотности излучения надбарьерных частиц [23—26]:

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = -Lnd \frac{2\sqrt{\pi e^2 m^2}}{E} \frac{\zeta}{1+\zeta} \times \\ \times \int_{p^*}^{\infty} \rho dp \left\{ \int_x^{\infty} d\xi \Phi(\xi) + \frac{2}{x} \left( 1 + \frac{\zeta^2}{2(1+\zeta)} \right) \Phi'(x) \right\}, \quad (51.6)$$

где  $x = (\zeta/\chi_r)^{2/3}$  и  $\zeta = \omega/E'$ . Эта формула обобщает соответствующий результат классической теории (51.2) на случай, когда  $\omega \sim E$ .

Рассмотрим два предельных случая формулы (51.6). Если в области значений  $p \sim R$ , дающих существенный вклад в интеграл по  $p$  в (51.6), выполняется условие  $x \ll 1$ , то

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = Le^2 nd 3^{1/6} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) m^2 E^{-1} u^{1/3} \frac{1+(1+u)^2}{(1+u)^2} \int_{p^*}^{\infty} \rho dp \chi_r^{2/3}. \quad (51.7)$$

Если же  $x \gg 1$ , то \*)

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = Lnd \frac{e^2 m^2}{E} \int_{\rho^*}^{\infty} \rho d\rho \frac{\sqrt{\pi u \chi_r}}{(1+u)^2} (1+u+u^2) e^{-\frac{2u}{3\chi_r}}. \quad (51.8)$$

Заметим, что при  $\chi_r \gg 1$  условие  $x \ll 1$  может выполняться не только в области частот  $\omega \ll E$ , но и при  $\omega \sim E$ . Простая асимптотическая формула (51.7) в этом случае определяет спектральную плотность излучения в широкой области частот излученных фотонов вплоть до значений  $\omega$ , сравнимых с энергией частицы  $E$ . Неравенство же  $x \gg 1$  всегда выполняется, если энергия излученного фотона достаточно близка к энергии частицы  $\omega \rightarrow E$ .

На рис. 7.7 представлены результаты вычисления спектральной плотности излучения по формулам (51.6), (51.7) и (51.8) в случае движения электронов с энергиями

$E=10, 100$  и  $1000$  ГэВ вблизи кристаллографической оси  $\langle 111 \rangle$  кристалла кремния. На этом же рисунке представлена спектральная плотность излучения, найденная по формуле (51.2) классической теории излучения. Приведенные графики показывают, что учет эффекта отдачи при излучении существенно сказывается на излучении быстрой частицы в кристалле уже при энергиях, достижимых на современных ускорителях. Связано это

с тем, что средние поля кристаллических осей оказываются на несколько порядков больше, чем электромагнитные поля макроскопических внешних полей, поэтому при движении в кристалле эффект отдачи сказывается на излучении при гораздо меньших энергиях частиц, чем во внешнем макроскопическом поле.

Формула (51.6) может быть использована также и для определения вероятности образования электронно-позитронной пары фотоном высокой энергии в поле непрерывного потенциала кристаллических осей. Действительно, выполнив в (51.6) замены переменных  $\omega \rightarrow -\omega$ ,  $E \rightarrow -E_+$ ,  $E' \rightarrow E_-$  и домножив

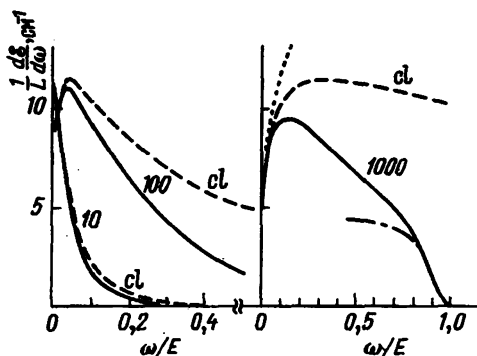


Рис. 7.7. Спектры излучения электронов с энергиями 10, 100 и 1000 ГэВ при движении частиц в кристалле кремния вблизи оси  $\langle 111 \rangle$ . Сплошные линии — спектр с учетом отдачи при излучении (51.6); штриховые — результат классической теории (51.2); пунктир и штрихпунктир — асимптотические формулы (51.7) и (51.8)

\*) При выводе (51.7) и (51.8) мы воспользовались соответствующими асимптотиками формул теории магнитно-тормозного излучения [28].

полученный результат на  $(E_+^2/\omega^3)(dE_+/d\omega)$ , приходим к следующему выражению для вероятности интересующего нас процесса [20—23]:

$$\frac{dw_{\pm}}{dE_+} = Lnd2\sqrt{\pi}e^2m^2\frac{E_+}{\omega}\frac{\zeta_{\pm}}{1+\zeta_{\pm}}\int_{\rho^*}^{\infty}\rho d\rho\left\{\int_{x_{\pm}}^{\infty}d\xi\Phi(\xi)+\frac{2}{x_{\pm}}\left(1+\frac{\zeta_{\pm}^2}{1+\zeta_{\pm}}\right)\Phi'(x_{\pm})\right\}, \quad (51.9)$$

где

$$\zeta_{\pm} = \frac{\omega}{E_{\pm}}, \quad x_{\pm} = \left[ \frac{\omega m^3}{E_+ E_-} \left( \frac{dU_r}{d\rho} \right)^{-1} \right]^{2/3}, \quad \omega = E_+ + E_-.$$

Формула (51.9) справедлива, если выполняется неравенство  $\gamma\psi_c \gg 1$  и, кроме того, если изменение радиуса кривизны траектории родившихся частиц в пределах длины когерентности процесса образования пары  $l_{\pm}$  мало по сравнению с радиусом кривизны траектории, т. е. если выполняются неравенства  $2R/\psi \gg l_{\pm} \gg a$ .

Для иллюстрации полученного результата на рис. 7.8 представлена зависимость вероятности образования пары (51.9) от энергии одной из частиц пары (позитрона) при различных значениях энергии фотона. Вычисления выполнены в случае

падения фотона на кристалл вольфрама вдоль оси  $\langle 111 \rangle$ . Температура кристалла предполагается комнатной. Приведенные графики показывают, что при малых значениях энергии фотона вероятность образования пары имеет максимум или  $E_+ = \omega/2$ . С ростом энергии фотона этот максимум постепенно переходит в широкое плато и затем в середине этого плато возникает провал.

Таким образом, при ультравысоких энергиях фотонов форма спектра становится весьма схожей с формой спектра образовавшихся пар в аморфной среде. Величина же вероятности образования пары в кристалле оказывается существенно больше, чем вероятность образования пары в аморфной среде.

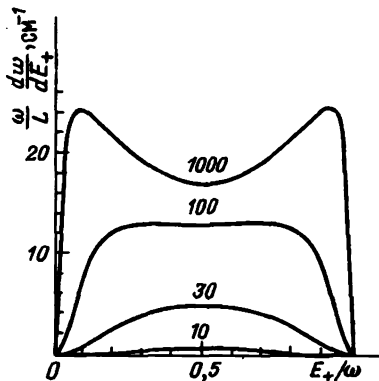


Рис. 7.8. Распределение по энергии позитрона  $E_+$  вероятности образования электронно-позитронных пар фотоном при различных значениях энергий фотонов (цифры у кривых соответствуют значениям энергии фотонов в ГэВ), падающих на кристалл вольфрама вдоль оси  $\langle 111 \rangle$

## § 52. Излучение на цепочке атомов в области малых частот

Рассмотрим теперь излучение в области достаточно малых частот, при которых выполняются условия  $\bar{a}^2/R\psi \gg l_c \gg 2R/\psi$ , где  $\bar{a}$  — среднее расстояние между цепочками атомов, и выясним, к чему приводит недипольность излучения в этой области частот [1, 2].

Процесс излучения в этом случае разыгрывается на длине  $l_c$  значительно превосходящей длину  $2R/\psi$ , на которой на частицу эффективно действует поле цепочки, поэтому для нахождения входящей в (49.1) величины  $d\mathcal{E}(b)/d\omega$  можно воспользоваться формулой (7.4). При этом спектральная плотность излучения  $d\mathcal{E}(b)/d\omega$  будет определяться углом рассеяния частицы цепочкой  $\mathfrak{F}(b)$  и, следовательно,

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = 2Ln d\psi \int_0^{\infty} db \frac{d\mathcal{E}(\mathfrak{F}(b))}{d\omega}. \quad (52.1)$$

В дипольном приближении эта формула приобретает вид

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = L \frac{4}{3\pi} e^2 n d \gamma^2 \psi \int_0^{\infty} db \mathfrak{F}^2(b). \quad (52.2)$$

Заметим, что выражение (52.2) для интенсивности излучения может быть получено из формулы (49.3), справедливой в дипольном приближении, если в последней рассмотреть предельный случай малых частот излучения. Действительно, при выполнении условия  $l_c \gg 2R/\psi$  входящие в (49.3) величины  $A$  и  $B$  будут определяться соотношениями

$$A \approx 2\varepsilon_{\perp} \cos \frac{1}{2} \varphi(b), \quad B \approx 0.$$

Подставляя эти соотношения в (49.3), получим формулу (52.2).

При  $\psi \gg \psi_c$ , согласно (38.4), углы рассеяния электронов и позитронов на цепочке атомов одинаковы, поэтому и излучение этих частиц в области малых частот будет одинаковым. Если же  $\psi \lesssim \psi_c$ , то, как показано в § 38, рассеяние электронов и позитронов на цепочке атомов различно. В соответствии с этим различной будет и интенсивность излучения электронов и позитронов в области малых частот.

При выполнении условия  $\gamma \mathfrak{F} \gg 1$ , согласно (52.1) и (8.7),

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = 8Ln d Re^2 \psi \pi^{-1} \ln(\gamma \mathfrak{F}), \quad (52.3)$$

где  $\mathfrak{F}$  — среднее значение модуля угла рассеяния частицы цепочкой.



Рассмотрим более подробно излучение частиц в области малых частот при  $\psi \gg \psi_c$ . В этом случае, согласно (38.4), среднее значение угла рассеяния частицы цепочкой атомов по порядку величины равно

$$\bar{\vartheta} \sim \frac{2U_0}{E\psi}, \quad (52.4)$$

где  $U_0 = 2Ze^2/d$ . Используя эту оценку и формулы (8.6) и (8.7), находим, что при  $\psi \gg \psi_c$

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle \sim Lne^2 dR\psi \begin{cases} \left( \frac{U_0}{m\psi} \right)^2, & \frac{U_0}{m} \ll \psi, \\ \ln \frac{U_0}{m\psi}, & \frac{U_0}{m} \gg \psi. \end{cases} \quad (52.5a)$$

$$(52.5b)$$

Соотношения (52.5) показывают, что в дипольном приближении с уменьшением угла  $\psi$  интенсивность излучения в области малых частот увеличивается. При  $\psi \lesssim U_0/m$  условие дипольности излучения частицы в поле цепочки атомов кристалла не выполняется. В этом случае, согласно (52.5б), интенсивность излучения уменьшается.

Таким образом, при  $\psi < U_0/m$  недипольность приводит к подавлению интенсивности когерентного излучения релятивистских частиц на цепочке атомов в области малых частот.

Заметим в этой связи, что при анализе результатов борновской теории когерентного излучения быстрых частиц в кристалле было обращено внимание на то, что если в формулах этой теории выполнить формальный переход  $E \rightarrow \infty$  и  $\psi \rightarrow 0$ , то борновское сечение излучения неограниченно растет [29—32]. Ясно, что должен существовать механизм, который ограничивает такой рост, ибо неограниченное увеличение сечения может привести, например, к тому, что излученная энергия превысит энергию налетающей частицы.

Формулы (52.5) показывают, что в действительности при  $E \rightarrow \infty$  и  $\psi \rightarrow 0$  неограниченный рост сечения излучения отсутствует, так как при таком переходе нарушается условие дипольности излучения частицы на цепочке атомов.

Полученные результаты иллюстрирует рис. 7.9, на котором представлена зависимость величины спектральной плотности излуче-

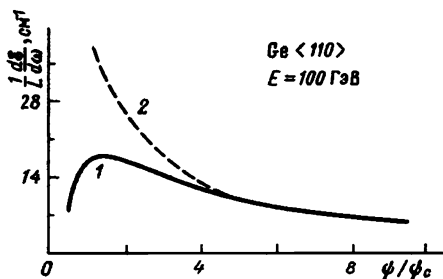


Рис. 7.9. Зависимость спектральной плотности излучения в области малых частот от угла падения пучка электронов на цепочку с учетом (1) и без учета (2) эффекта недипольности излучения

ния в области малых частот (52.1) от угла падения пучка электронов на цепочку при больших значениях энергии и при  $\psi \gg \psi_c$ . Штриховая линия на этом рисунке соответствует результату вычисления интенсивности излучения в борновском приближении (29.5).

### § 53. Влияние многократного рассеяния и поляризации среды на когерентное излучение

Полученные в предыдущих параграфах результаты относились к случаю, когда длина когерентности процесса излучения мала по сравнению с длиной свободного пробега частицы в кристалле между последовательными столкновениями с цепочками атомов. Если это условие не выполняется, то необходим учет влияния многократного рассеяния частицы на цепочках атомов на излучение.

Многократное рассеяние частиц приводит, как мы видели в гл. 3, к подавлению тормозного излучения при высоких энергиях в аморфных телах. Оно же, как будет показано ниже, приводит и к подавлению когерентного излучения в кристаллах. Чтобы описать этот эффект в кристаллах, необходимо усреднить общую формулу для спектральной плотности излучения (3.10) по углам рассеяния. В кристалле, в отличие от аморфной среды, рассеяние происходит только по азимутальному углу  $\varphi$  (см. рис. 5.20). Если этот угол мал ( $\varphi^2 l_c \ll 1$ ), то согласно (41.6), распределение частиц по углам является гауссовым. Мы начнем с рассмотрения этого случая, являющегося простейшим [33—35].

Если азимутальный угол рассеяния  $\varphi$  мал, то входящий в формулу (3.10) угол рассеяния частиц  $\vartheta$  будет равен  $\vartheta \approx \psi\varphi$ . Процесс рассеяния по углам  $\vartheta$  поэтому также будет гауссовым. При этом плотность вероятности того, что углы рассеяния в кристалле  $\vartheta_n = \psi\varphi(n\Delta)$  в моменты времени  $\tau_n = n\Delta$ , где  $n=1, 2, \dots, N$ , а  $\Delta = \tau/N$  и  $N \gg 1$ , будут лежать в интервалах  $(\vartheta_n, \vartheta_n + d\vartheta_n)$ , определяется соотношением

$$d\mathcal{P}_N = \frac{d\vartheta_1 \dots d\vartheta_N}{(2\pi q_c \Delta)^{N/2}} \exp \left\{ -\frac{\vartheta_1^2}{2q_c \Delta} - \dots - \frac{(\vartheta_N - \vartheta_{N-1})^2}{2q_c \Delta} \right\}, \quad (53.1)$$

где  $q_c = \overline{\psi^2} \varphi^2$  — среднее значение квадрата угла рассеяния частицы на цепочках атомов кристалла, отнесенное к единице длины.

Используя это выражение, можно представить среднее значение спектральной плотности излучения быстрой частицы в кристалле в виде функционального интеграла [34, 35]:

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle_c = \int d_w \vartheta(\tau) \frac{d\mathcal{E}[\vartheta(\tau)]}{d\omega}. \quad (53.2)$$

Формула (53.2) отличается от соответствующей формулы для аморфной среды (23.4) тем, что в кристалле угол рассеяния  $\vartheta(\tau)$  имеет только одну компоненту, тогда как в аморфной среде  $\vartheta(\tau)$  содержит две компоненты. Средние углы рассеяния частицы в кристалле и в аморфной среде, как показывает формула (42.9), могут сильно различаться, причем в интересующем нас случае  $\psi \gg \psi_c$  (т. е. когда  $\varphi^2 l_c \ll 1$ ) это различие определяется множителем, не зависящим от  $\tau$ . Отсюда можно заключить, что формула для среднего значения спектра излучения в кристалле будет отличаться от формулы для среднего значения спектра излучения в аморфной среде тем, что в (23.5) следует заменить  $Q_{\pm}^2 \rightarrow Q_{\pm}$  и  $q \rightarrow 2q_c$ . Таким образом, мы приходим к следующему выражению для спектральной плотности излучения в кристалле:

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle_c = \frac{d\mathcal{E}_{\text{coh}}}{d\omega} \frac{1}{2\gamma^2(1-v\sqrt{\epsilon})} \Phi(s_c), \quad (53.3)$$

где  $d\mathcal{E}_{\text{coh}}/d\omega$  — соответствующий результат теории когерентного излучения быстрой заряженной частицы в кристалле, в котором не учитывается влияние многократного рассеяния и поляризации среды на излучение (см. формулы (53.2) и (38.4)), и  $\Phi(s_c)$  — функция, описывающая влияние многократного рассеяния частицы на цепочках атомов кристалла на излучение:

$$\Phi(s_c) = 48s_c^2 \left\{ -\frac{\pi}{4} + \int_0^{\infty} dx \frac{\exp(-2s_c x)}{x \operatorname{sh} x} \left[ \sin 2s_c x + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} (\sin 2s_c x + \cos 2s_c x) \right] \right\}. \quad (53.4)$$

Здесь  $s_c = \frac{1}{4} \gamma^2 (1 - v\sqrt{\epsilon}) \sqrt{\omega/\omega_c}$  и  $\omega_c = \frac{1}{2} q_c \gamma^4$ .

Формула (53.3) определяет влияние как многократного рассеяния, так и поляризации среды на интенсивность когерентного излучения быстрой частицы в кристалле при  $\epsilon v^2 < 1$ . Эта формула получена на основе метода функционального интегрирования. Аналогичный результат может быть получен также и на основе метода кинетического уравнения. При  $\epsilon = 1$  это было сделано в работе [36].

При малых и больших значениях параметра  $s_c$  функция  $\Phi(s_c)$  имеет следующие асимптотики:

$$\Phi \approx \begin{cases} 1, & s_c \geq 1, \\ 6\eta s_c, & s_c \ll 1, \end{cases} \quad (53.5a)$$

$$(53.5b)$$

где  $\eta = \int_0^{\infty} dx x^{-1/2} (\operatorname{ch} x - 1) (\operatorname{sh} x)^{-3/2} \approx 1.33$ .

Таким образом, при  $s_c \geq 1$  формула (53.3) переходит в соответствующий результат теории когерентного излучения релятивистских частиц на цепочках атомов кристалла с учетом

влияния поляризации среды на излучение:

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle_c = \frac{d\mathcal{E}_{\text{coh}}}{d\omega} \frac{1}{2\gamma^2(1-v\sqrt{\epsilon})}. \quad (53.6)$$

При  $s_c \rightarrow 0$  формула (53.3) уточняет коэффициент в соответствующем результате работы [37], найденном на основе качественных оценок. В этом предельном случае, согласно (53.5б),

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle_c \approx \frac{d\mathcal{E}_{\text{coh}}}{d\omega} \sqrt{\frac{\omega}{\omega_c}}. \quad (53.7)$$

Мы видим, что при  $s_c \ll 1$  ( $\omega \ll 1/2q_c\gamma^4$ ) имеет место значительное подавление когерентного излучения, обусловленное многократным рассеянием.

При произвольных значениях  $s_c$  функция  $\Phi(s_c)$  дана на рис. 3.2. Приведенные на этом рисунке кривые показывают, что функции  $\Phi(s_c)$  и  $\Phi_M(s)$  весьма близки друг к другу. Значения же переменных  $s_c$  и  $s$  при заданных  $E$  и  $\omega$  могут сильно различаться, поэтому условия, при которых происходит изменение характера излучения в кристалле и в аморфной среде, различны.

Сравним теперь основные характеристики излучения быстрых частиц в кристалле и в аморфной среде в области малых частот.

Прежде всего отметим, что величина  $d\mathcal{E}_{\text{coh}}/d\omega$  связана со спектральной плотностью излучения в аморфной среде (18.5) соотношением

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{coh}}}{d\omega} = \frac{q_c}{q} \frac{d\mathcal{E}_{\text{вн}}}{d\omega}, \quad (53.8)$$

где  $q = \overline{\vartheta_a^2}/L$  — среднее значение квадрата угла рассеяния частицы в аморфной среде на единице длины (20.13). В интересующем нас интервале углов  $\psi$  ( $\psi_c \ll \psi \ll R/a$ ), согласно (41.9),  $q_c \gg q$ , поэтому

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{coh}}}{d\omega} \gg \frac{d\mathcal{E}_{\text{вн}}}{d\omega}.$$

В области частот  $\omega \ll \omega_p$ , как известно [29], диэлектрическая проницаемость определяется соотношением

$$\epsilon \approx 1 - \omega_p^2/\omega^2,$$

где  $\omega_p = \sqrt{4\pi nZe^2/m}$  — плазменная частота. Входящая в (23.9) и (53.3) величина  $2\gamma^2(1-v\sqrt{\epsilon})$  в этой области частот может быть записана в виде

$$2\gamma^2(1-v\sqrt{\epsilon}) \approx 1 + \frac{\gamma^2\omega_p^2}{\omega^2}.$$

Формулы (23.9) и (53.3) при этом показывают, что как в аморфной среде, так и в кристалле, поляризация среды оказывает влияние на излучение в области частот  $\omega \lesssim \gamma\omega_p$ . Многократное же рассеяние в аморфной среде и в кристалле оказывает влияние на излучение соответственно при  $\omega \lesssim \omega_{LP}$  и  $\omega \lesssim (2q_c/q)\omega_{LP}$ . При  $\psi_c \ll \psi \ll R/a$ , согласно (42.9),  $q_c \gg q$ , поэтому изменение характера излучения в кристалле происходит при более низких энергиях частиц и в большей области частот, чем в аморфной среде.

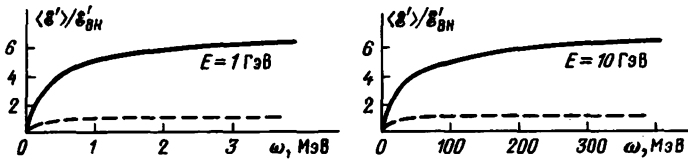


Рис. 7.10. Влияние многократного рассеяния на спектр излучения электронов с разной энергией  $E$  в кристалле (сплошные линии) и в аморфной среде (штриховые) в области малых частот

На рис. 7.10 представлены результаты вычисления спектров излучения электронов с энергией  $E=1$  и  $10$  ГэВ в аморфной среде (штриховые линии) и в кристалле (сплошные линии) в случае, когда пучок падает на кристалл вольфрама под углом  $\psi=2$  мрад и кристаллографической оси  $\langle 100 \rangle$ . В качестве потенциала отдельного атома среды в вычислениях использован экранированный потенциал Кулона (7.5).

Полученные результаты показывают, что при излучении в кристалле область частот, в которой существенное влияние на излучение оказывает многократное рассеяние, значительно больше соответствующей области частот для аморфной среды. Важным также является то, что при не очень высоких энергиях частиц в аморфной среде влияние многократного рассеяния на излучение нельзя рассматривать независимо от влияния поляризации среды, тогда как в кристалле такое рассмотрение проводить можно. Для этого необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\omega_{LP} \ll \gamma\omega_p \ll (2q_c/q)\omega_{LP}. \quad (53.9)$$

Эти неравенства, в частности, выполняются в случае, когда электрон с энергией  $E=1$  ГэВ движется в кристалле вольфрама под углом  $\psi=2$  мрад к оси  $\langle 100 \rangle$ . При  $E=10$  ГэВ, как легко проверить, выполняются условия

$$\gamma\omega_p \lesssim \omega_{LP} \ll (2q_c/q)\omega_{LP},$$

и, следовательно, для этой энергии существует область частот, в которой как в кристалле, так и в аморфной среде, влияние на излучение многократного рассеяния можно рассматривать независимо от влияния поляризации среды.

Таким образом, при движении ультрарелятивистского электрона в кристалле эффект подавления когерентного излучения, обусловленный многократным рассеянием (аналог эффекта Ландау — Померанчука подавления тормозного излучения быстрых частиц в аморфной среде) может проявляться при значительно более низких энергиях частиц, чем в аморфной среде.

Мы рассмотрели влияние многократного рассеяния на когерентное излучение в области малых частот. Нетрудно учесть также влияние отдачи при излучении на этот эффект и рассмотреть влияние многократного рассеяния на когерентное образование в кристалле электронно-позитронных пар. Действительно, вероятность излучения быстрой частицы в веществе с учетом эффекта отдачи определяется формулой (17.4). Эта формула представляет собой функционал, определяемый траекторией частицы в веществе, которая в рассматриваемом нами случае является случайной. При  $\psi \gg \psi_c$  функционал (17.4), подлежащий усреднению, имеет гауссов вид, поэтому, как и в классической теории, среднее значение вероятности излучения может быть записано в виде функционального интеграла по винеровской мере (24.1), вычисление которого может быть проведено аналитически. При этом среднее значение спектральной плотности вероятности излучения имеет вид [38]

$$\left\langle \frac{dw}{d\omega} \right\rangle = \frac{e^2 q_c L}{3\pi m^2 \omega} \left[ (E^2 + E'^2) \Phi(s) + \frac{1}{2} \omega^2 G(s) \right], \quad (53.10)$$

где  $\Phi(s)$  — функция (53.4), определяющая влияние многократного рассеяния на излучение быстрого электрона в кристалле в классической теории,  $s = \frac{m^2}{8E^2} \sqrt{\frac{2\omega E}{q_c E'}}$  и

$$G(s) = 96s^2 \left( \frac{\pi}{4} - \int_0^\infty dx e^{-2sx} \frac{\sin 2sx}{\operatorname{sh} x} \right). \quad (53.11)$$

Формула (53.10) обобщает соответствующий результат классической теории (53.3) на случай, когда существенны эффекты, связанные с отдачей при излучении. Она справедлива, если длина когерентности процесса излучения  $l = 2EE'/m^2\omega$  превышает длину порядка  $2R/\psi$ , на котором на частицу эффективно действует поле цепочки, и, кроме того, если  $\psi \gg \psi_c$  и столкновения частицы с различными цепочками атомов можно считать случайными.

Выполнив в (53.10) замены переменных  $\omega \rightarrow -\omega$ ,  $E \rightarrow -E_+$ ,  $E' \rightarrow E_-$  и домножив результат на  $E_+^2 \omega^{-2} (dE_+/d\omega)$ , получим формулу для вероятности образования электронно-позитронной

пары фотоном в кристалле с учетом влияния многократного рассеяния частиц на цепочках атомов на этот процесс:

$$\left\langle \frac{dw_{\pm}}{dE_{\pm}} \right\rangle = \frac{e^2 q_c L E_{\pm}^2}{3\pi m^2 \omega^3} \left[ (E_{-}^2 + E_{+}^2) \Phi(s_{\pm}) + \frac{1}{2} \omega^2 G(s_{\pm}) \right], \quad (53.12)$$

где  $s_{\pm} = \frac{m^2}{8E_{\pm}^2} \sqrt{2\omega E_{\pm} / q_c E_{\pm}}$ , а  $q_c$  относится к позитрону.

#### § 54. Влияние многократного рассеяния на излучение в условиях дипольности излучения

В предыдущем параграфе мы рассмотрели влияние многократного рассеяния на когерентное излучение быстрых частиц в кристалле. Результаты этого параграфа справедливы в случае достаточно малых углов рассеяния частицы в кристалле. При прохождении частицы через кристалл могут иметь место условия, когда угол рассеяния не мал по сравнению с углом падения частицы на кристалл по отношению к кристаллографической оси. Рассеяние в этом случае не будет гауссовым процессом, поэтому этот случай требует особого исследования. Такое исследование может быть проведено в общем виде, если излучение носит дипольный характер, т. е. при выполнении условия  $\gamma \vartheta_l \ll 1$  [35].

Спектральная плотность излучения в дипольном приближении с учетом влияния поляризации среды на излучение определяется формулой (19.5). Мы будем интересоваться далее излучением в области частот, для которых длина когерентности  $l_c = 2\gamma^2 / \omega$  велика по сравнению с длиной  $2R / \psi$ , на которой ускорение частицы при столкновении с каждой цепочкой атомов отлично от нуля. В этой области частот входящая в (19.5) величина  $|\mathbf{W}(v)|^2$  определяется соотношением (19.7), в котором под углом  $\vartheta_n$  следует понимать угол рассеяния при столкновении с  $n$ -й цепочкой и  $t_n$  — момент столкновения.

Соотношение (19.7) необходимо усреднить по углам рассеяния  $\vartheta_n$ . Как и прежде, будем интересоваться излучением в том случае, когда столкновения частицы с различными цепочками атомов являются случайными. При многократном рассеянии на различных цепочках происходит перераспределение частиц по азимутальному углу (см. § 41.7). После  $n$ -го столкновения полное изменение азимутального угла будет равно

$$\Phi_n = \sum_{k=1}^n \Phi_k.$$

При этом проекции вектора  $\vartheta_n$ , определяющего угол рассеяния частицы при  $n$ -м столкновении с цепочкой, на плоскость  $(x, y)$  ортогональную оси  $z$  имеют вид

$$\begin{aligned} (\vartheta_n)_x &= \psi (\cos \Phi_n - \cos \Phi_{n-1}), \\ (\vartheta_n)_y &= \psi (\sin \Phi_n - \sin \Phi_{n-1}). \end{aligned}$$

Подставив эти соотношения в (19.7), получим

$$|\mathbf{W}(\nu)|^2 = \psi^2 \sum_{n,k} e^{i\nu(t_n - t_k)} \{ \cos(\Phi_n - \Phi_k) - \cos(\Phi_n - \Phi_{k-1}) - \cos(\Phi_{n-1} - \Phi_k) + \cos(\Phi_{n-1} - \Phi_{k-1}) \}. \quad (54.1)$$

Так как в рассматриваемом случае столкновения с различными цепочками атомов кристалла независимы, то в (54.1) может быть выполнено усреднение по азимутальным углам  $\Phi_n$  в явном виде. Замечая, что

$$\langle \cos(\Phi_n - \Phi_k) \rangle = \langle \cos \varphi \rangle^{|n-k|}, \quad \langle \sin \varphi \rangle = 0,$$

находим

$$\langle |\mathbf{W}(\nu)|^2 \rangle = 2\psi^2 \sum_{n,k} \cos \nu(t_n - t_k) [ \langle \cos \varphi \rangle^{|n-k|} - \langle \cos \varphi \rangle^{|n-k+1|} ], \quad (54.2)$$

где  $\langle \cos \varphi \rangle = \frac{1}{\bar{a}} \int_a^b db \cos \varphi(b)$  — среднее значение функции  $\cos \varphi$  при рассеянии частицы отдельной цепочкой атомов и  $\bar{a}$  — среднее расстояние между цепочками:  $\bar{a} = (nd)^{-1/2}$ .

Заметим, что аморфной среде после усреднения  $|\mathbf{W}|^2$  по углам двойная сумма по рассеивающим центрам (19.7) перешла в одинарную. В результате этого зависимость  $\langle |\mathbf{W}(\nu)|^2 \rangle$  от величин  $t_n$  выпала. В случае же кристалла двойная сумма после усреднения по углам остается и, следовательно, сохраняется зависимость величины  $\langle |\mathbf{W}(\nu)|^2 \rangle$  от  $t_n$ . Поэтому формула (54.2) должна быть еще усреднена по случайным моментам времен столкновения частицы с цепочками атомов.

Так как столкновения случайны, то функция распределения по величинам  $\tau_n$ , определяющим интервал времени между  $n$ -м и  $(n-1)$ -м столкновениями частицы с цепочками атомов, имеет вид (см., например, стр. 36 работы [39])

$$f(\tau_n) = \frac{1}{\bar{\tau}} \exp\left(-\frac{\tau_n}{\bar{\tau}}\right), \quad (54.3)$$

где  $\bar{\tau} = \bar{a}/\psi$  — среднее время свободного пробега частицы между последовательными столкновениями с цепочками. Учтя, что

$$t_n = \sum_{k=1}^n \tau_k,$$

приходим к следующему выражению для среднего значения функции  $\cos \nu(t_n - t_k)$ :

$$\langle \cos \nu(t_n - t_k) \rangle = \text{Re} (1 + i\nu\bar{\tau})^{-|n-k|}.$$

Таким образом, в дипольном приближении спектральная плотность излучения частицы, движущейся в кристалле под



малым углом  $\psi$  к одной из кристаллических осей, определяется в области малых частот формулой (19.5) с

$$\langle |W(v)|^2 \rangle = 2\psi^2 \operatorname{Re} \sum_{n,k} (1 + iv\bar{\tau})^{-|n-k|} \{ \langle \cos \varphi \rangle^{|n-k|} - \langle \cos \varphi \rangle^{|n-k+1|} \}. \quad (54.4)$$

Заметим, что при выводе этой формулы не использован конкретный закон взаимодействия частицы с полем отдельной цепочки атомов.

Если толщина кристалла  $L$  велика по сравнению с длиной когерентности  $l_c$ , то вкладом в излучение с участков пути масштаба  $l_c$  на входе и выходе из кристалла можно пренебречь. В этом случае, сделав в (54.4) замену  $n = m + k$ , суммирование по  $m$  можно распространить на интервал  $m$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . В результате суммирования геометрической прогрессии находим, что

$$\langle |W(v)|^2 \rangle = 4\mathcal{N} \psi^2 v^2 \langle \sin^2 \frac{1}{2} \varphi \rangle \left[ v^2 + \frac{4}{\bar{\tau}^2} \langle \sin^2 \frac{1}{2} \varphi \rangle^2 \right]^{-1}, \quad (54.5)$$

где  $\mathcal{N} = L/v\bar{\tau}$  — число столкновений частицы с цепочками атомов кристалла. При этом среднее значение спектральной плотности излучения приобретает следующий вид:

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle_c = L \frac{e^2 \psi^2 \omega_d}{3\pi \gamma^2 (1 - v\sqrt{\epsilon})} F(x), \quad (54.6)$$

$$F(x) = x \left( \frac{3}{2} - x^2 \right) \arctg x + 3x^2 \left[ 1 - \frac{1}{2} \ln(1 + x^{-2}) \right], \quad (54.7)$$

где

$$\omega_d = 4\gamma^2 (\bar{\tau})^{-1} \langle \sin^2 \frac{1}{2} \varphi \rangle, \quad x = \frac{2\omega}{\omega_d} (1 - v\sqrt{\epsilon}).$$

Формула (54.6) справедлива при произвольных значениях азимутального угла рассеяния. Требуется только, чтобы выполнялись условия  $l_c \gg 2R/\psi$  и  $\gamma^2 \vartheta_l^2 \ll 1$ .

Рассмотрим некоторые предельные случаи формулы (54.6) при  $\omega \gtrsim \gamma\omega_p$ . Функция  $F(x)$  при малых и больших значениях  $x$  имеет место следующие асимптотики:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{7}{20x^2} + \dots, & x > 1, \end{cases} \quad (54.8a)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x [\pi + 2x \ln(ex^2) + \dots], & x \ll 1. \end{cases} \quad (54.8b)$$

Аргумент этой функции в интересующей нас области частот может быть записан в виде

$$x = \frac{\omega}{\omega_d} \left( 1 + \frac{\gamma^2 \omega_p^2}{\omega^2} \right).$$

Из последнего соотношения, а также из асимптотик (54.8), вытекает, что спектральная плотность излучения быстрой частицы в кристалле зависит от соотношения между частотами  $\omega$ ,  $\omega_d$  и  $\gamma\omega_p$ .

При выполнении условия  $\omega_d \ll \gamma\omega_p$ , согласно (54.6) и (54.8a), имеем

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle_c = L \frac{2e^2\psi^2\omega_d}{3\pi(1+\gamma^2\omega_p^2/\omega^2)}. \quad (54.9)$$

Если кроме условия  $\omega_d \ll \gamma\omega_p$  выполняется неравенство  $\psi_c \ll \psi$ , то эта формула переходит в соответствующий результат теории когерентного излучения (53.6) с учетом влияния поляризации среды на излучение.

Частота  $\omega_d$  зависит от знака заряда частицы и от соотношения между  $\psi$  и  $\psi_c$ . Максимум  $\omega_d$  достигается при  $\psi \lesssim \psi_c$ , т. е. когда характерные значения азимутальных углов рассеяния сравнимы с единицей. В этой области углов  $\psi$  по порядку величины  $\omega_d \sim 4\gamma^2 ndR\psi_c$ . Сравнивая это значение  $\omega_d$  с  $\gamma\omega_p$ , находим, что

$$(\omega_d/\gamma\omega_p)^2 \sim 4\gamma ndR^2.$$

Последнее соотношение показывает, что при  $\psi \lesssim \psi_c$  в области достаточно больших  $\gamma$  всегда может быть выполнено неравенство  $\omega_d \gg \gamma\omega_p$ . В этом случае существует три области частот  $\omega$ , в которых излучение существенно различается:

$$\omega \gg \omega_d, \quad \omega_d \gg \omega \gg \gamma\omega_p, \quad \gamma\omega_p \gg \omega.$$

В области частот  $\omega \gg \omega_d$  формула (54.6) переходит в (54.9). Многократное рассеяние и поляризация среды в этой области частот не оказывают влияния на излучение. При этом излучение определяется только особенностями взаимодействия частицы с полем отдельной цепочки атомов.

При  $\omega_d \gg \omega \gg \gamma\omega_p$ , согласно (54.6) и (54.8б),

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle_c = \frac{1}{2} L e^2 \psi^2 \omega. \quad (54.10)$$

В этой области частот многократное рассеяние частицы на цепочках атомов приводит к быстрому уменьшению спектральной плотности излучения с уменьшением частоты излученной волны.

Заметим, что соотношение (54.10) может быть получено и из оценочной формулы (8.9). Действительно, при  $\psi \lesssim \psi_c$ , согласно (42.11),  $\mathcal{Q}^2 \approx 2\psi^2$ . Подставляя это соотношение в (8.9), приходим в дипольном приближении с точностью до числового коэффициента к формуле (54.10).

Сравнивая этот результат с соответствующим результатом для аморфной среды (22.7), видим, что при движении в кристалле многократное рассеяние частицы на цепочках атомов

оказывает значительное влияние на излучение не только при  $\gamma\vartheta_l \gg 1$ , как это имело место в аморфной среде, но и в случае, когда  $\gamma\vartheta_l \ll 1$ . Связано это с нарушением условия гауссовости распределения частиц в кристалле по углам рассеяния  $\psi \lesssim \psi_c$ .

При  $\omega \lesssim \gamma\omega_p$  формула (54.6) переходит в (54.9). В этой области частот значительное влияние на излучение оказывает поляризация среды.

Полученные в этом параграфе формулы справедливы, если выполняется условие дипольности излучения частицы в кристалле  $\gamma^2\vartheta_l^2 \ll 1$ . При  $\psi \sim \psi_c$  по порядку величины  $\vartheta_l^2 \sim \psi_c^2$ , и неравенство  $\gamma^2\psi_c^2 \ll 1$  приводит к ограничению на энергию  $E$ . Заметим в этой связи, что существует интервал энергий  $E$ , в котором одновременно выполняются условия  $\gamma^2\psi_c^2 \ll 1$  и  $\gamma\omega_p \ll \omega$ . А именно, эти неравенства выполняются, если

$$(4\pi n R^2)^{-1} \ll \gamma \ll ma/4Ze^2.$$

Таким образом, существует интервал энергий  $E$ , в котором многократное рассеяние быстрой частицы в кристалле существенно сказывается на ее излучении при выполнении условия дипольности излучения.

## § 55. Излучение в тонких кристаллах

Полученные до сих пор результаты относились к случаю, когда длина когерентности  $l_c$  мала по сравнению с толщиной мишени  $L$ . При достаточно больших  $E$  и малых  $\omega$  и  $L$ , однако, всегда может быть выполнено и обратное неравенство;  $l_c \gg L$ . Процесс излучения в этом случае будет разыгрываться на длине, превосходящей толщину мишени. Некоторые особенности этого процесса при излучении быстрыми электронами в тонком слое аморфного вещества были рассмотрены в § 26, где, в частности, было показано, что в рассматриваемом случае характер излучения изменяется, если угол рассеяния частицы мишенью  $\vartheta$  превысит характерный угол ее излучения  $\theta \sim \gamma^{-1}$ .

При прохождении быстрой заряженной частицы через кристалл, как отмечалось выше, средние значения углов ее рассеяния могут существенно отличаться от средних углов рассеяния в аморфной среде. Покажем, как этот эффект будет проявляться при излучении в кристалле, и сравним основные характеристики излучения быстрых частиц в тонком слое аморфного и кристаллического веществ при  $l_c \gg L$  [40, 41]. Эффектом отдачи при излучении мы здесь будем пренебрегать.

При выполнении условия  $l_c \gg L$  спектральная плотность излучения ультрарелятивистского электрона в веществе как в аморфной, так и в кристаллической среде, в области малых частот определяется формулой (7.4). Входящий в эту формулу угол рассеяния частицы мишенью для разных частиц различен,

поэтому формула (7.4) должна быть усреднена по распределению  $f(\vartheta)$  вышедших из мишени частиц по углам

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \int d^2\vartheta f(\vartheta) \frac{d\mathcal{E}(\vartheta)}{d\omega}. \quad (55.1)$$

Для малых и больших по сравнению с  $\gamma^{-2}$  значениях квадрата угла рассеяния

$$\overline{\vartheta^2} = \int d^2\vartheta \vartheta^2 f(\vartheta),$$

согласно (8.6) и (8.7), имеем

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \frac{2e^2}{3\pi} \begin{cases} \gamma^2 \overline{\vartheta^2}, & \gamma^2 \overline{\vartheta^2} \ll 1, \\ 3 \ln \gamma^2 \overline{\vartheta^2}, & \gamma^2 \overline{\vartheta^2} \gg 1. \end{cases} \quad (55.2a)$$

Формулы (55.2) показывают, что при малых и больших значениях  $\gamma^2 \overline{\vartheta^2}$  характер излучения электрона в тонком слое вещества различен. Это различие обусловлено различием во взаимодействии «полуголого» электрона с атомами среды в пределах длины когерентности в этих случаях (см. § 8). Так, при  $\gamma^2 \overline{\vartheta^2} \ll 1$  существенна интерференция волн, излучаемых электроном в направлениях начального и конечного движений. Вследствие интерференции эти волны в значительной степени подсокращают друг друга. При этом интенсивность результирующего поля пропорциональна углу рассеяния частицы мишенью  $\vartheta$ , а интенсивность излучения пропорциональна квадрату этого угла  $\vartheta^2$ . Если же  $\gamma^2 \overline{\vartheta^2} \gg 1$ , то интерференция практически отсутствует, в результате чего интенсивность излучения практически не зависит от  $\vartheta$ .

Указанные закономерности являются общими, и не зависят от того, в какой среде происходит излучение, в аморфной или кристаллической. Требуется только, чтобы выполнялось условие  $l_c \gg L$ .

Если атомы в среде расположены хаотично (аморфная среда), то средний квадрат угла рассеяния частицы мишенью определяется формулой (20.11). Подставляя это выражение в (55.2), находим, что с логарифмической точностью\*)

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \begin{cases} \frac{4}{3} \frac{L}{L_R}, & L \ll e^2 L_R, \\ \frac{2e^2}{\pi} \ln \frac{L}{e^2 L_R}, & L \gg e^2 L_R. \end{cases} \quad (55.3a)$$

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \begin{cases} \frac{4}{3} \frac{L}{L_R}, & L \ll e^2 L_R, \\ \frac{2e^2}{\pi} \ln \frac{L}{e^2 L_R}, & L \gg e^2 L_R. \end{cases} \quad (55.3b)$$

\*) Аналогичные формулы были получены в работе [42] на основе метода кинетического уравнения для функции распределения частиц в среде по координатам и скоростям.

Формулы (55.3) показывают, что при выполнении условий  $l_c \gg L \gg e^2 L_R$ , в отличие от результатов Бете и Гейтлера (18.5) и Ландау и Померанчука (21.2), спектральная плотность излучения практически не зависит от толщины мишени. Это означает, что при  $l_c \gg L \gg e^2 L_R$  интенсивность излучения практически не зависит от числа соударений частицы с атомами среды, т. е. в этом случае имеет место эффект подавления излучения. Отметим, что сущность эффекта Ландау—Померанчука и эффекта подавления излучения в тонком слое вещества одинакова—эти эффекты возникают, если угол рассеяния частицы на длине когерентности превосходит характерный угол излучения релятивистской частицы. Условия же на толщину мишеней, при которых имеют место эти эффекты, различны, поэтому различны и спектральные плотности излучения в тонком и в толстом слоях вещества.

Рассмотрим теперь излучение при прохождении релятивистского электрона через тонкий кристалл под малым углом  $\psi$  к одной из его кристаллических осей (ось  $z$ ). Рассеяние частиц в этом случае, как показано в § 38, происходит в основном вдоль азимутального угла  $\varphi$  в плоскости, ортогональной оси  $z$ . Так как угол  $\varphi$  может принимать различные значения, то спектральная плотность излучения (7.4) должна быть усреднена по углам  $\varphi$  с функцией распределения  $f(\varphi, L)$ :

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle_c = \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi f(\varphi, L) \frac{d\mathcal{E}(\varphi)}{d\omega}, \quad (55.4)$$

где  $f(\varphi, L)$  определяется формулой (41.2).

При  $\gamma^2 \bar{\vartheta}^2 \ll 1$ , согласно (55.4) и (8.6),

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle_c = \frac{2e^2}{3\pi} \gamma^2 \bar{\vartheta}^2(L), \quad (55.5)$$

где  $\bar{\vartheta}^2(L)$ —средний квадрат угла рассеяния частиц кристаллом (41.4).

Если кроме условия  $\gamma^2 \bar{\vartheta}^2 \ll 1$  выполняется неравенство  $\psi \gg \psi_c$ , то в соответствии с (41.7),

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle_c = L \frac{16e^2 n d}{3\pi m^2 \psi} \int_0^\infty db \left( \frac{d}{db} \int_0^\infty dx U_r(\rho) \right)^2. \quad (55.6)$$

Это выражение для спектральной плотности излучения совпадает с соответствующим результатом теории когерентного излучения быстрых электронов в кристалле в области малых частот.

Формула (55.6) показывает, что с уменьшением  $\psi$  интенсивность излучения быстро увеличивается. При  $\psi < \psi_c$ , как

показано в § 41, средний квадрат угла рассеяния  $\overline{\vartheta^2}(L)$  уменьшается с уменьшением  $\psi$ . Поэтому в области малых частот интенсивность излучения (55.5) достигает максимальной величины при  $\psi \sim \psi_c$ .

Если же выполняется условие  $\gamma^2 \overline{\vartheta^2} \gg 1$ , то согласно (55.4) и (8.7)

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle_c = \frac{2e^2}{\pi} \ln \gamma^2 \overline{\vartheta^2}(L). \quad (55.7)$$

Спектр излучения в кристалле в этом случае, как и в аморфной среде (см. формулу (55.36)), почти не зависит от толщины мишени. Таким образом, при многократном рассеянии частиц на цепочках атомов, так же как и при многократном рассеянии на атомах в аморфной среде, возможен эффект подавления излучения, но теперь — излучения когерентного. Заметим, что поскольку в широкой области углов  $\psi$  выполняется условие  $\overline{\vartheta^2}(L) \gg \vartheta_a^2$ , то при прохождении электронов через кристалл могут быть созданы более благоприятные условия для исследования эффекта подавления излучения, чем при прохождении через аморфную среду.

Заметим, что при выводе формулы (7.4) мы не учитывали переходное излучение. Это возможно, если  $\omega \gg L\omega_p^2$ . Поэтому приведенными в этом параграфе формулами можно пользоваться, если  $l_c \gg L$  и  $\omega \gg L\omega_p^2$ .

Рассмотрим в качестве примера излучение электронов высокой энергии, проходящих через тонкий ( $L \ll l_c$ ) кристалл кремния под углом  $\psi = 0,5$  мрад к оси  $\langle 111 \rangle$  и через тонкий слой аналогичной аморфной мишени. На рис. 7.11 представлены результаты вычислений зависимости спектров излучения (55.4) и (55.1) от толщины мишени в рассматриваемых случаях кристалла и аморфной среды.

Полученные результаты и условия их применимости показывают, что эффект подавления когерентного излучения в тонком кристалле должен проявляться при более низких энергиях частиц  $E$ , при меньших толщинах мишеней и в более широком

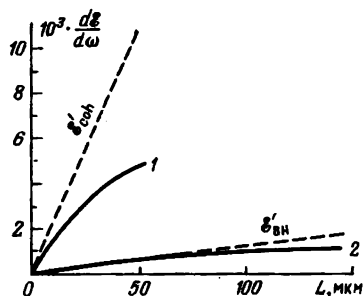


Рис. 7.11. Влияние многократного рассеяния на излучение частиц ультравысокой энергии в тонком ( $L \ll l_c$ ) слое кристаллического (1) и аморфного (2) вещества

интервале частот излученных фотонов, чем эффект подавления тормозного излучения в аморфной мишени.

В заключение отметим, что аналогичный эффект должен иметь место и при прохождении ультрарелятивистских электронов или позитронов через тонкий кристалл в условиях каналирования. В этом случае  $\overline{\vartheta^2} \sim \psi_c^2$  и формулы (55.2), описывающие излучение в тонкой мишени ( $l_c \gg L$ ), существенно отличаются от формулы (50.9), описывающей излучение каналированных частиц в толстой мишени, когда  $L \gg l_c$ . Действительно, в последнем случае спектр излучения в области малых частиц зависит линейно от  $L$  и  $\omega$  ( $\mathcal{E}' \sim L\omega$ ), тогда как при  $l_c \gg L$  и  $\gamma^2 \overline{\vartheta^2} \gg 1$  такие зависимости отсутствуют.

## ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ ПОТЕНЦИАЛА РЕШЕТКИ НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ БЫСТРЫХ ЧАСТИЦ С КРИСТАЛЛОМ

### § 56. Учет столкновений падающей частицы с отдельными атомами решетки

В предыдущих главах исследовалось движение и излучение быстрых заряженных частиц в поле непрерывного потенциала кристаллических осей и плоскостей. Потенциальная энергия взаимодействия частицы с совокупностью атомов, образующих кристаллическую решетку, при этом заменялись потенциальной энергией, усредненной по координате кристаллической оси или плоскости, вблизи которой происходит движение. Таким образом, мы отвлекались от дискретности в структуре решетки и не учитывали влияние на взаимодействие частицы с кристаллом отклонения потенциала относительно своего среднего значения. Такой подход справедлив, если изменение прицельного параметра между последовательными соударениями частицы с атомами решетки мало по сравнению с прицельным параметром. При этом траектория частицы плавно изменяется с глубиной проникновения в кристалл и для ее нахождения в первом приближении можно пренебречь неоднородностью потенциала кристалла вдоль оси или плоскости, вблизи которой движется частица.

Однако влияние неоднородности потенциала решетки на взаимодействие частицы с кристаллом может быть существенным в ряде процессов, сопровождающих прохождение частицы через кристалл. Например, оно определяет некогерентное рассеяние и излучение частиц в кристалле, а также существенно при рассмотрении кинетики пучка частиц в кристалле. Влияние неоднородности потенциала решетки на движение частицы приводит в ряде случаев к значительным изменениям интегралов движения, определяющих траекторию частицы в поле кристаллических осей или плоскостей. Кроме того, неоднородность потенциала является сама по себе источником дополнительной стохастизации движения частицы в кристалле, приводящей к нарушению устойчивости ее движения в поле непрерывного потенциала кристаллических осей и плоскостей.

В настоящей главе рассмотрим некоторые аспекты влияния неоднородности потенциала решетки на движение и излучение быстрых частиц в кристаллах, обратив главное внимание на уточнение условий применимости приближения непрерывного



потенциала кристаллических осей и плоскостей для описания взаимодействия частицы с кристаллом.

Неоднородность потенциала кристаллической решетки может быть связана с тепловым разбросом положений атомов в кристалле относительно равновесных положений, с наличием примесей и различных дефектов кристаллической решетки. Кроме того, на движение частицы в кристалле может оказать влияние и ее взаимодействие с электронной подсистемой решетки. В совершенных кристаллах в ряде случаев (см. ниже) средние значения углов многократного рассеяния частицы на тепловых колебаниях атомов значительно (в  $Z$  раз) превосходят средние значения углов многократного рассеяния на электронной подсистеме решетки, поэтому мы остановимся вначале на изучении влияния теплового разброса атомов решетки на движение быстрой частицы в кристалле. Анализ этого процесса мы проведем в так называемой модели бинарных столкновений, в которой полный угол рассеяния частицы в кристалле представляется собой сумму малых углов рассеяния, получаемых при столкновении с каждым атомом решетки:

$$\vartheta = \sum_n \vartheta_n. \quad (56.1)$$

При классическом рассмотрении величина  $\vartheta_n$  определяется соотношением

$$\vartheta_n = -\frac{1}{E} \frac{d}{d\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} dz u(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_n), \quad (56.2)$$

где  $u(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_n)$  — потенциальная энергия взаимодействия частицы с атомом, находящимся в точке  $\mathbf{r}_n$ , и  $\rho$  — прицельный параметр. Характерные значения углов рассеяния быстрой частицы в поле атома малы по сравнению с единицей:  $\vartheta_n \sim 2Ze^2/E\rho \ll 1$ , поэтому входящую в (56.2) траекторию  $\mathbf{r}(t)$  можно считать близкой к прямолинейной:

$$\mathbf{r}(t) \approx \rho(t_n) + \mathbf{v}t,$$

где  $t_n$  — момент времени, когда произошло столкновение, и, следовательно,

$$\vartheta_n = -\frac{1}{E} \frac{d}{d\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} dz u(\rho(t_n) - \rho_n, z). \quad (56.3)$$

Положения атомов в решетке вследствие термодинамических флуктуаций имеют некоторый разброс  $\mathbf{u}_n$  относительно своих равновесных положений  $\mathbf{r}_n^0$ :

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n^0 + \mathbf{u}_n, \quad (56.4)$$

поэтому полный угол рассеяния частицы в кристалле (56.1) представляет собой случайную величину, определяемую случайными значениями величин  $u_n$ .

Определение распределения вышедших из кристалла частиц по углам  $\vartheta$  в общем случае представляет собой довольно сложную задачу ввиду того, что движущаяся в кристалле частица наряду с регулярным воздействием поля решетки на траекторию испытывает также случайные отклонения, причем последние в некоторых случаях могут оказывать значительное влияние на траекторию. Поэтому при изучении движения быстрых частиц в кристалле особое значение приобретает метод машинного моделирования движения частицы в поле кристаллической решетки.

Мы приведем здесь результаты численного расчета на ЭВМ угловых распределений рассеянных частиц при падении пучка под малыми углами к одной из кристаллических осей, полученные на основе метода бинарных столкновений [1]. Вычисления проводились по формуле (56.1). В качестве потенциала взаимодействия частицы с атомом использовался стандартный потенциал Линдхарда [2]:

$$u(r) = \frac{Ze^2}{r} \left( 1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + 3R^2}} \right). \quad (56.5)$$

(Среднее значение этой функции по координате  $z$  представляет собой непрерывный потенциал цепочки атомов (35.16), предложенный Линдхардом.) Тепловые колебания атомов решетки учитывались с помощью генератора случайных чисел. Распределение положений атомов в решетке предполагалось гауссовым со средним квадратом смещения каждого атома вдоль одной из осей равным  $\bar{u}^2$ . Взаимодействием с электронной подсистемой решетки пренебрегалось.

На рис. 8.1 представлены результаты вычислений угловых распределений рассеянных кристаллом частиц в зависимости от угла их падения по отношению к кристаллической оси, толщины кристалла и знака заряда частицы. Вычисления проводились для пучков протонов и  $\pi^-$ -мезонов с энергией 15 ГэВ, падающих на кристалл германия под малыми углами к оси  $\langle 110 \rangle$ . Значение толщин мишени (в микрометрах), для которых проводились вычисления, обозначены в верхних частях рисунков. Жирные точки соответствуют значениям углов падения пучка на кристалл; крестики — направлению на ось  $\langle 110 \rangle$ . По оси ординат и абсцисс отложены углы рассеяния вдоль осей  $y$  и  $x$  в поперечной плоскости. Точки изображают результаты численного моделирования, соответствующие однократному прохождению частицы через кристалл.

Приведенные рисунки показывают, что рассеяние частиц в рассматриваемом случае происходит, в основном, вдоль азимутального угла  $\varphi$  в поперечной плоскости. Связано это

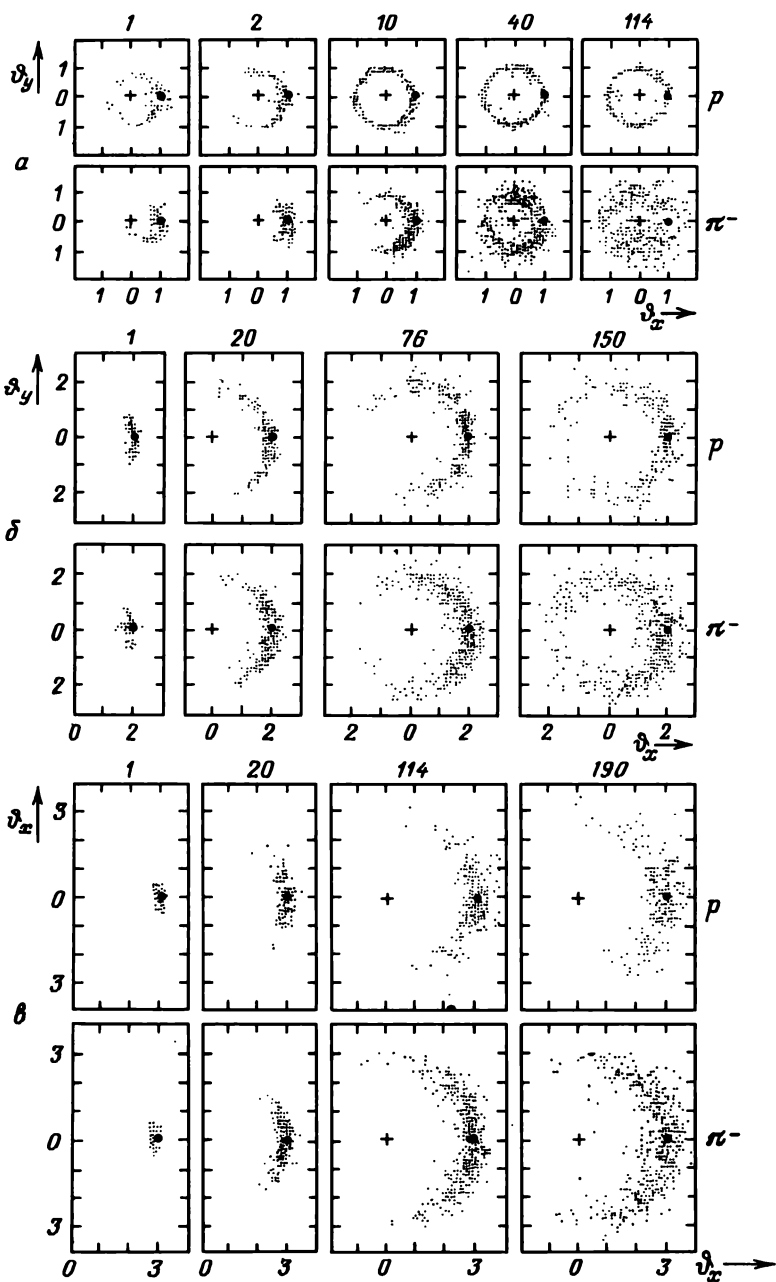


Рис. 8.1. Результаты численного моделирования угловых распределений рассеиваемых кристаллом германия протонов  $p$  и  $\pi$ -мезонов при падении частиц под различными углами  $\psi$ , равными:  $\psi_c$  (а);  $2\psi_c$  (б) и  $3\psi_c$  (в), к оси  $\langle 110 \rangle$

с тем, что рассеяние в этом направлении происходит более интенсивно, чем в радиальном направлении. Отметим, что при  $\psi = \psi_c$  для протонов, начиная уже с толщины  $L = 10$  мкм, устанавливается равномерное распределение частиц по азимутальному углу  $\phi$  (см. формулу (41.10)), и такое распределение сохраняется вплоть до весьма больших толщин.

Рассеяние в радиальном направлении обусловлено многократным рассеянием частиц на тепловых колебаниях атомов решетки. Приведенные рисунки показывают, что для  $\pi^-$ -мезонов это рассеяние оказывается более значительным, чем для протонов. Особенно ярко это различие проявляется в случае, когда  $\psi = \psi_c$ . Причина такого различия в том, что при таких значениях углов падения  $\psi$  протоны не могут подходить на близкие расстояния к атомам решетки, где флюктуации потенциала, связанные с тепловыми колебаниями, значительны и, следовательно, для протонов многократное рассеяние подавлено по сравнению с  $\pi^-$ -мезонами. Последние же при всех значениях углов падения могут подходить на близкие расстояния к оси цепочки. С ростом толщины мишени расширение пучка в радиальном направлении увеличивается. Заметим, что отрицательно заряженные частицы имеют преимущественное рассеяние в радиальном направлении в области малых значений углов  $\psi$ . При этом начиная с некоторой толщины мишени устанавливается симметричное распределение частиц по углам рассеяния с осью симметрии вдоль оси цепочки, причем в области углов вылета частиц из кристалла, меньших  $\psi_c$ , имеется тенденция к равномерному распределению частиц по углам (см. рис. 8.1, а, соответствующий  $L = 114$  мкм).

Обратим внимание также на то, что в области углов падения  $\psi = \psi_c$  и толщин, для которых средние углы рассеяния в радиальном направлении малы по сравнению со средними углами рассеяния в азимутальном направлении, рассеяние протонов вдоль угла  $\phi$  происходит более интенсивно, чем  $\pi^-$ -мезонов. Этот результат согласуется с соответствующим результатом, полученным в § 41 без учета влияния тепловых колебаний атомов на рассеяние. В области же углов  $\psi \gtrsim 3\psi_c$  это соотношение между углами рассеяния меняется (см. рис. 8.1, в,  $L = 20$  и 114 мкм). А именно, средние значения углов рассеяния протонов в этом случае оказываются меньшими средних углов рассеяния  $\pi^-$ -мезонов. Причина этого в том, что при  $\psi \gtrsim 3\psi_c$  на движение положительно заряженных частиц может оказать влияние периодичность расположения цепочек атомов в кристалле.

Действительно, для отрицательно заряженных частиц, как показывают сечения Пуанкаре (рис. 5.17), явление динамического хаоса имеет место практически для всех начальных условий в широком интервале углов  $\psi$  и, следовательно, модель случайных столкновений частицы с цепочками атомов, использованная в § 41, для этих частиц справедлива в широком

интервале углов  $\psi$ . Для положительно же заряженных частиц ситуация оказывается иной. Уже начиная с  $\psi \sim \psi_c$  довольно значительная часть фазового пространства (см. рис. 5.17) соответствует регулярному движению, причем с ростом  $\psi$  эта область быстро увеличивается. Таким образом, в случае протонов периодичность расположения цепочек атомов в поперечной плоскости может оказать влияние на движение частицы в кристалле.

### § 57. Среднее значение квадрата угла многократного рассеяния быстрой частицы в кристалле

Важной величиной, определяющей процесс рассеяния быстрой заряженной частицы в кристалле, является среднее значение квадрата угла многократного рассеяния. Эта величина определяется как рассеянием частицы в поле непрерывного потенциала кристаллических осей или плоскостей, вблизи которых происходит движение, так и рассеянием на различных несовершенствах решетки. Процесс рассеяния быстрых частиц в поле непрерывного потенциала кристаллических осей рассматривался в гл. 5. Исследуем теперь влияние на рассеяние неоднородности потенциала решетки. С этой целью определим среднее значение квадрата угла многократного рассеяния быстрых частиц в ориентированном по пучку кристалле с учетом влияния тепловых колебаний атомов на рассеяние. Рассеянием на электронной подсистеме решетки мы здесь пренебрегаем.

Используя формулу (56.1), запишем квадрат угла рассеяния частицы в кристалле в виде

$$\vartheta^2 = \sum_{n,k} \vartheta_n \vartheta_k, \quad (57.1)$$

где  $\vartheta_n$  — угол рассеяния при столкновении с  $n$ -м атомом решетки,  $\vartheta_n \ll 1$ . Эта формула должна быть усреднена по тепловому разбросу положений атомов в решетке и по различным траекториям частицы в кристалле. В предыдущем параграфе такое усреднение проводилось путем численного моделирования движения частицы в кристалле. В некоторых случаях, однако, нахождение среднего значения величины (57.1) может быть проведено аналитическими методами. Как будет показано далее, при надбарьерном движении быстрых частиц в кристалле вдоль одной из кристаллических осей среднее значение квадрата угла многократного рассеяния определяется формулой [3]:

$$\langle \vartheta^2 \rangle = \langle \vartheta^2 \rangle_c + \langle \vartheta^2 \rangle_n, \quad (57.2)$$

где  $\langle \vartheta^2 \rangle_c$  — среднее значение квадрата угла многократного рассеяния частицы в поле непрерывного потенциала цепочек атомов (41.4), а  $\langle \vartheta^2 \rangle_n$  — среднее значение квадрата угла некогерентного рассеяния:

$$\langle \vartheta^2 \rangle_n = 2\pi L n \int_{\rho^*}^{\infty} \rho d\rho A(\rho). \quad (57.3)$$

В последней формуле для отрицательно заряженных частиц (и для положительно заряженных частиц при  $\varepsilon_{\perp} > U_r(0)$ ) величина  $\rho^*$  равна нулю, а для положительно заряженных частиц с  $\varepsilon_{\perp} < U_r(0)$  она находится из соотношения  $\varepsilon_{\perp} = U_r(\rho^*)$ . Величина  $A(\rho)$  определяется формулой

$$A(\rho) = \frac{1}{(2\pi)^4 E^2} \int d^2g d^2g' \mathbf{g} \mathbf{g}' B(\mathbf{g}) B(\mathbf{g}') \left\{ \exp \left[ -\frac{1}{2} \overline{u^2} (\mathbf{g} - \mathbf{g}')^2 \right] - \exp \left[ -\frac{1}{2} \overline{u^2} (\mathbf{g}^2 + \mathbf{g}'^2) \right] \right\}, \quad (57.4)$$

где  $\overline{u^2}$  — среднее значение квадрата тепловых колебаний атомов в решетке,

$$B(\mathbf{g}) = e^{-g\rho} U_{g_{\perp}}, \quad U_{g_{\perp}} = \int dz d^2\rho e^{ig\rho} u(\rho, z),$$

$u(\rho, z)$  — потенциальная энергия взаимодействия частицы с атомом решетки.

Первое слагаемое в (57.2) определяет рассеяние частицы в поле непрерывного потенциала цепочек атомов кристалла, второе слагаемое — некогерентное рассеяние на тепловых колебаниях атомов.

Для электронов (и для позитронов при  $\varepsilon_{\perp} > U_r(0)$ ) величина  $\langle \mathcal{Q}^2 \rangle_n$  не зависит от значения угла  $\psi$  падения частиц на кристалл по отношению к кристаллографической оси и совпадает с соответствующим результатом теории рассеяния при  $\psi \gg \psi_c$ , когда поле решетки слабо возмущает движение частицы:

$$\langle \mathcal{Q}^2 \rangle_n = \frac{Ln}{4\pi^2 E^2} \int d^2g g^2 |U_g|^2 (1 - e^{-g^2 \overline{u^2}}). \quad (57.5)$$

Мы видим, что  $\langle \mathcal{Q}^2 \rangle_n$  только фактором Дебая — Валлера отличается от соответствующего выражения для аморфной среды\*. При комнатной температуре эта величина оказывается несколько меньшей (на 5 ÷ 20% — в зависимости от температуры кристалла) от соответствующей величины для аморфной среды.

Для позитронов при  $\varepsilon_{\perp} < U_r(0)$ , согласно (57.3), значение  $\langle \mathcal{Q}^2 \rangle_n$  быстро уменьшается с уменьшением  $\psi$ . Связано это с тем, что при  $\varepsilon_{\perp} < U_r(0)$  надбарьерные позитроны не подходят на близкие расстояния к оси цепочки, где велики флуктуации потенциала решетки и, следовательно, при таких значениях поперечных энергий многократное рассеяние позитронов на тепловых колебаниях атомов решетки оказывается подавленным.

\* Аналогичный результат был получен в работе [4] при изучении многократного рассеяния быстрых частиц в кристалле при движении вблизи кристаллографических плоскостей под углами, значительно превосходящими критический угол плоскостного каналирования.

Величина же  $\langle \vartheta^2 \rangle_c$ , как показано в § 41, существенно зависит от угла  $\psi$ , причем в широком интервале этих углов она значительно превосходит средний квадрат угла некогерентного рассеяния частицы в кристалле. Это, однако, не означает, что вторым слагаемым в (57.2) всегда можно пренебречь по сравнению с первым. Слагаемое  $\langle \vartheta^2 \rangle_c$  связано с рассеянием частицы в поле непрерывного потенциала цепочек атомов кристалла. Но в таком поле сохраняется энергия поперечного движения, что приводит в свою очередь к тому, что рассеяние возможно только вдоль азимутального угла  $\phi$ . Слагаемое же  $\langle \vartheta^2 \rangle_n$  определяет изменение энергии  $\epsilon_{\perp}$  и, в частности, оно определяет уширение распределения рассеянных частиц в радиальном направлении.

Приведем теперь вывод формулы (57.2). При достаточно высоких энергиях, как показано в § 35, траектория частицы, движущейся в кристалле под малым углом к одной из кристаллических осей, определяется, в основном, непрерывным потенциалом цепочек атомов кристалла (35.3). При этом отклонение потенциала решетки от своего среднего значения

$$\delta U = U(\mathbf{r}) - U(\rho) \quad (57.6)$$

будет определять флуктуации траектории частицы в кристалле относительно траектории в поле  $U(\rho)$ . Если эти флуктуации малы, то при нахождении среднего значения величины (57.1) может быть выполнено разложение по  $\delta U$ . В первом приближении такого разложения входящая в (57.1) траектория частицы будет определяться только непрерывным потенциалом кристаллических осей.

Подставляя соотношения (56.3) и (56.4) в (57.1) и используя фурье-разложение потенциальной энергии  $u(r)$ , запишем квадрат угла рассеяния в виде

$$\vartheta^2 = \frac{1}{(2\pi)^4 E^2} \sum_{n,k} \int d^2 g d^2 g' \mathbf{g} \mathbf{g}' B_n(\mathbf{g}) B_k(\mathbf{g}') \exp(i\mathbf{g} \mathbf{u}_n - i\mathbf{g}' \mathbf{u}_k). \quad (57.7)$$

Здесь

$$B_n(\mathbf{g}) = U_g e^{-i\mathbf{g}(\rho(t_n) - \rho_n^0)},$$

$\rho(t)$  — траектория частицы в поле непрерывного потенциала цепочек атомов кристалла и  $\rho_n^0$  — положения цепочек атомов в плоскости  $(x, y)$ .

Предполагая для простоты, что распределение атомов в решетке по  $\mathbf{u}_n$  имеет гауссов вид со средним квадратом смещения каждого атома равным  $u^2$ , приходим к следующей формуле для среднего значения квадрата угла рассеяния:

$$\langle \vartheta^2 \rangle = \int \dots \int \prod_i \frac{d^2 u_i}{2\pi u^2} e^{-u_i^2/2u^2} \sum_{n,k} \vartheta_n \vartheta_k. \quad (57.8)$$

В результате интегрирования по переменным  $\mathbf{u}_i$  находим, что

$$\langle \mathfrak{S}^2 \rangle = \sum_n A(\rho(t_n)) + \left| \sum_n \frac{d}{E} \frac{\partial}{\partial \rho} U_r(\rho(t_n)) \right|^2, \quad (57.9)$$

где

$$A(\rho) = \frac{1}{(2\pi)^4 E^2} \int d^2 g d^2 g' \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}' B_n(\mathbf{g}) B_n^*(\mathbf{g}') \times \\ \times \left\{ \exp \left[ -\frac{1}{2} \overline{u^2} (\mathbf{g} - \mathbf{g}')^2 \right] - \exp \left[ -\frac{1}{2} \overline{u^2} (\mathbf{g}^2 + \mathbf{g}'^2) \right] \right\}, \quad (57.10)$$

$d$  — расстояние между атомами вдоль оси  $z$  и  $U_r(\rho)$  — непрерывный потенциал отдельной цепочки атомов:

$$U_r(\rho) = \frac{1}{4\pi^2 d} \int d^2 g B_n(\mathbf{g}) \exp \left( -\frac{1}{2} \mathbf{g}^2 \overline{u^2} \right).$$

В рассматриваемом случае, когда частица движется под малым углом  $\psi$  к одной из кристаллических осей, интервал времени  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  между последовательными соударениями с атомами решетки равен  $d/v$ . На этом интервале времени изменение функции  $\rho(t_n)$  по порядку величины определяется соотношением

$$\Delta \rho = \rho(t_{n+1}) - \rho(t_n) = d \cdot \max(\psi, \mathfrak{S}_1),$$

где  $\mathfrak{S}_1 \sim 2Ze^2/ER$  — характерное значение угла рассеяния быстрой частицы отдельным атомом. Таким образом, при малых  $\psi$  и больших  $E$  изменение величины  $\Delta \rho$  между последовательными соударениями с атомами решетки мало. При этом суммируемые в (57.9) функции плавно изменятся с ростом  $n$  и, следовательно, эти суммы могут быть заменены на соответствующие интегралы по времени. В результате такой замены формула (57.9) приобретает вид

$$\langle \mathfrak{S}^2 \rangle = \frac{1}{d} \int dt A(\rho(t)) + \left| \int dt \ddot{\rho} \right|^2, \quad (57.11)$$

где  $\ddot{\rho}$  — ускорение частицы в поле непрерывного потенциала совокупности цепочек атомов кристалла (35.3).

Учитывая, что

$$\int dt \ddot{\rho} = \sum_r \mathfrak{S}_r,$$

где  $\mathfrak{S}_r$  — угол рассеяния при столкновении с  $r$ -й цепочкой атомов, находим, что

$$\langle \mathfrak{S}^2 \rangle = \frac{1}{d} \int dt A(\rho(t)) + \sum_{r, r'} \mathfrak{S}_r \cdot \mathfrak{S}_{r'}. \quad (57.12)$$



Формула (57.12) еще должна быть усреднена по различным траекториям частиц. В общем виде такое усреднение выполнить затруднительно ввиду того, что движение частицы в кристалле может быть как регулярным, так и хаотическим. Рассмотрим поэтому некоторые предельные случаи формулы (57.12).

Если среднее поле решетки  $U(\rho)$  слабо возмущает движение частицы, то траектория в поперечной плоскости в первом приближении по потенциалу является прямолинейной:

$$\rho(t) = \rho_0 + \psi t \mathbf{n}_\perp, \quad (57.13)$$

где  $\rho_0$  — точка влета,  $\mathbf{n}_\perp$  — единичный вектор в плоскости  $(x, y)$ , определяющий направление движения. Формула (57.12) в этом случае должна быть усреднена по точкам влета:

$$\langle \vartheta^2 \rangle = \frac{1}{L_x L_y} \int d^2 \rho_0 \langle \vartheta^2 \rangle. \quad (57.14)$$

Среднее значение величины  $\langle \overline{\vartheta^2} \rangle$  при этом совпадает с соответствующим результатом борновской теории рассеяния быстрых частиц в кристалле (см. формулу (57.5)).

Разложение (57.13) справедливо, если  $\psi \gg \psi_c$ . При нарушении этого условия необходимо учитывать влияние на рассеяние отклонения траектории частицы от прямолинейной в поле непрерывного потенциала цепочек атомов. Движение в этом случае может быть как финитным, так и инфинитным по отношению к цепочкам атомов, параллельным оси  $z$ . В последнем случае частица последовательно сталкивается с различными цепочками атомов. При этом, если движение в поперечной плоскости является стохастическим (см. гл. 5), то эти столкновения можно рассматривать как случайные. Процедура усреднения формулы (57.12) по различным траекториям в этом случае может быть выполнена аналитически.

Действительно, для надбарьерных частиц, совершающих стохастическое движение в поперечной плоскости, среднее значение квадрата угла (57.12) определяется формулой

$$\langle \overline{\vartheta^2} \rangle = \prod_{n=1}^{N_r} \left( \int \frac{db_n}{a} \right) \langle \vartheta^2 \rangle, \quad (57.15)$$

где  $\bar{a}$  — среднее расстояние между цепочками атомов,  $b_n$  — прицельный параметр  $n$ -й цепочки,  $N_r$  — число столкновений с цепочками. Величина (57.12) может быть записана в виде суммы двух слагаемых, соответствующих некогерентному и когерентному рассеянию частицы в кристалле (57.2). Первое из этих слагаемых представляет собой среднее значение величины  $\int dt A(\rho(t))$ :

$$\langle \vartheta^2 \rangle_n = N_r \int \frac{db}{a} \int dt A(\rho_r(t)), \quad (57.16)$$

где  $\rho_r(t)$  — траектория частицы в поле одной из цепочек атомов.

Основной вклад в (57.16) вносят малые значения  $\rho$  ( $\rho \lesssim R$ ). В этой области значений  $\rho$  потенциал цепочки можно считать

цилиндрически-симметричным. Используя эту симметрию потенциала, можно перейти в (57.16) от интегрирования по времени к интегрированию по переменной  $\rho$ . Учитывая, что в рассматриваемом случае величина  $A(\rho_r)$  зависит только от расстояния между частицей и осью цепочки  $|\rho_r|$  и что  $N_r = Ln\psi\bar{a}d$ , получим после интегрирования в (57.16) по  $b$  формулу (57.3).

Определим теперь среднее значение второго слагаемого в (57.12) при стохастическом движении частицы в поперечной плоскости. Рассеяние частицы в поле непрерывного потенциала цепочки атомов, как показано в § 38, происходит только вдоль азимутального угла  $\varphi$  в поперечной плоскости, поэтому процедура усреднения этого слагаемого должна распространяться на углы  $\varphi$ , причем средние значения углов могут быть порядка единицы.

Полный угол рассеяния частицы  $\vartheta_N$  на  $N$  цепочках атомов кристалла связан с азимутальным углом рассеяния на этих цепочках соотношением

$$|\vartheta_N| = 2\psi \left| \sin \left( \frac{1}{2} \varphi_N \right) \right|. \quad (57.17)$$

Учитывая, что  $\varphi_N = \varphi_{N-1} + \varphi_N^*$ , где  $\varphi_N^*$  — угол рассеяния на  $N$ -й цепочке, величина  $\langle \vartheta^2 \rangle_c$  может быть записана в виде

$$\langle \vartheta_N^2 \rangle = \prod_{n=1}^N \left( \int \frac{db_n}{a} \right) 4\psi^2 \sin^2 \frac{1}{2} (\varphi_1^* + \varphi_2^* + \dots + \varphi_N^*).$$

Для  $\langle \vartheta_N^2 \rangle$  теперь легко получить рекуррентное соотношение

$$\langle \vartheta_N^2 \rangle = \langle \vartheta_1^2 \rangle + \langle \vartheta_{N-1}^2 \rangle \left( 1 - \frac{\langle \vartheta_1^2 \rangle}{2\psi^2} \right), \quad (57.18)$$

где

$$\langle \vartheta_1^2 \rangle = 4\psi^2 \int \frac{db}{a} \left( \sin \frac{1}{2} \varphi_1^*(b) \right)^2.$$

Решение (57.18) имеет вид

$$\langle \vartheta_N^2 \rangle = 2\psi^2 \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{\langle \vartheta_1^2 \rangle}{2\psi^2} \right)^N \right\}. \quad (57.19)$$

При  $\langle \vartheta_1^2 \rangle \ll 2\psi^2$  и  $N \gg 1$  это соотношение переходит в формулу (41.4).

## § 58. Процессы, связанные с малыми прицельными параметрами

При падении пучка заряженных частиц на кристалл под углом  $\psi$  к одной из кристаллических осей, меньшим критического угла осевого каналирования, происходит перераспределение плотности потока частиц в кристалле по прицельным

параметрам. В результате такого перераспределения потока эффективность взаимодействия частиц с атомами решетки изменяется по сравнению со случаем разориентированного кристалла, в котором взаимодействие частиц с атомами происходит, как в аморфной среде. Так, для положительно заряженных частиц при  $\psi < \psi_c$  значительная часть частиц пучка не может подойти на близкие расстояния к ядрам атомов решетки, что приводит к уменьшению эффективности взаимодействия пучка с ядрами атомов решетки.

Для отрицательно заряженных частиц при  $\psi < \psi_c$  наряду с инфинитным (надбарьерным) возможно их финитное (каналированное) движение в поле цепочек атомов кристалла. Каналированная частица в этом случае может чаще подходить на близкие расстояния к оси цепочки и при прохождении через область расположения ядер атомов решетки больше времени проводит в этой области, чем надбарьерная частица. По этой причине при каналировании отрицательно заряженных частиц эффективность их взаимодействия с атомами решетки должна быть выше, чем при надбарьерном движении. С тем чтобы показать это, рассмотрим ориентационную зависимость выхода неупругих процессов, связанных с малыми прицельными параметрами, таких как электроядерные реакции [5, 6]. Для простоты будем считать, что толщина кристалла достаточно мала, а энергия частиц достаточно велика, так что перераспределение частиц в пучке по поперечным энергиям при движении в кристалле отсутствует.

Рассмотрим вначале ориентационную зависимость выхода электроядерных реакций при прохождении релятивистских электронов и позитронов через кристалл под углом  $\psi \sim \psi_c$  к одной из кристаллических осей в условиях надбарьерного движения.

В рассматриваемой области углов  $\psi$  столкновения надбарьерной частицы с различными цепочками атомов можно считать случайными. При этом выход интересующего нас процесса  $I_n$  в кристалле может быть связан с выходом этого процесса в аморфной среде  $I_a = N_0 n \sigma$  соотношением

$$I_n = I_a \psi \int_{-\infty}^{+\infty} db \int_{-\infty}^{+\infty} dt w(\rho_r(t)), \quad (58.1)$$

где  $N_0$  — число атомов в среде,  $\sigma$  — сечение реакции,  $\rho_r(t)$  — траектория частицы в поле непрерывного потенциала цепочки атомов и  $w(\rho)$  — вероятность нахождения ядра атома на расстоянии  $\rho$  от оси цепочки:

$$w(\rho) = \frac{1}{2\pi u^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2u^2}\right). \quad (58.2)$$

Действительно, пусть на цепочку атомов длины  $L$  под углом  $\psi$  к ее оси падает поток частиц с единичной плотностью

(см. рис. 5.11), так что в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярной пучку, проходит одна частица. Тогда выход интересующего нас процесса в единицу времени будет определяться соотношением

$$J = L\psi \int_{-\infty}^{+\infty} db \int_{-\infty}^{+\infty} dt v \sigma n(\rho(t)), \quad (58.3)$$

где  $n(\rho)$  — плотность атомов на расстоянии  $\rho$  от цепочки. При движении в кристалле надбарьерной частицы величина  $J$  должна быть умножена на число цепочек атомов в поперечной плоскости  $N_r$ . При этом плотность атомов  $n(\rho)$  может быть записана в виде

$$n(\rho) = \frac{n}{2\pi u^2 n_{\perp}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2u^2}\right),$$

где  $n_{\perp}$  — плотность цепочек атомов в поперечной плоскости. Подставляя это соотношение в (58.3) и учитывая, что величина  $nN_r/n_{\perp}$  представляет собой полное число атомов в кристалле, приходим к формуле (58.1).

Используя уравнение движения (35.7), можно перейти в (58.1) от интегрирования по времени к интегрированию по переменной  $\rho$ . При этом

$$I_n = I_a 2\psi \int_{-\infty}^{+\infty} db \int_{\rho_0}^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho} w(\rho). \quad (58.4)$$

Записав это соотношение в виде

$$I_n = 2\psi I_a \int_{-\infty}^{\infty} db \int_0^{\infty} \frac{d\rho}{\rho} w(\rho) \Theta\left(1 - \frac{U_r(\rho)}{\varepsilon_{\perp}} - \frac{b^2}{\rho^2}\right), \quad (58.5)$$

изменим порядок интегрирования в (58.5). В результате после интегрирования по  $b$  находим, что для электронов

$$I_n^- = I_a, \quad (58.6)$$

а для позитронов

$$I_n^+ = 2\pi I_a \int_{\rho^*}^{\infty} \rho d\rho w(\rho), \quad (58.7)$$

где  $\rho^*$  определяется из соотношения  $\varepsilon_{\perp} = U_r(\rho^*)$  при

$$\varepsilon_{\perp} < U_r(0) \text{ и } \rho^* = 0 \text{ при } \varepsilon_{\perp} > U_r(0).$$

При выводе формул (58.6) и (58.7) предполагалось, что распределение падающих на цепочку частиц по прицельным параметрам является равномерным и что потенциал цепочки обладает цилиндрической симметрией. Эти требования выполняются, если энергия поперечного движения  $|\varepsilon_{\perp}|$  не очень

мала. А именно, требуется, чтобы  $\varepsilon_1$  была велика по сравнению со значением потенциальной энергии  $U(\rho)$  в седловых точках.

Таким образом, для надбарьерных электронов выход интересующего нас процесса в кристалле и в аморфной среде одинаков\*). Для позитронов величины  $I_n^+$  и  $I_a$  различаются только при  $\psi \lesssim \psi_c$ , причем в этой области углов  $I_n^+ < I_a$ . Такая зависимость  $I_n^+$  от  $\psi$  обусловлена тем, что при  $\psi < \psi_c$  позитроны не подходят на близкие расстояния к оси цепочки, где плотность атомов решетки максимальна.

Рассмотрим теперь ориентационную зависимость выхода  $I^-$  ядерных реакций из кристалла при падении пучка электронов под углом  $\psi \lesssim \psi_c$  к одной из кристаллических осей. В этом случае часть частиц падающего пучка при входе в кристалл захватывается в режим осевого каналирования. При этом величина  $I^-$  может быть представлена в виде суммы вкладов в процесс, связанных с надбарьерными  $I_n^-$  и с каналированными  $I_c^-$  частицами:

$$I^- = I_n^- + I_c^- \quad (58.8)$$

Для надбарьерных электронов, согласно (58.6), выход ядерных реакций не зависит от угла, поэтому величина  $I_n^-$  будет определяться долей частиц, совершающих надбарьерное движение,

$$I_n^- = I_a [1 - \Phi(\psi)], \quad (58.9)$$

где  $\Phi(\psi)$  — доля частиц, захваченных в канал (38.1).

Для каналированных частиц

$$I_c^- = N_T \int_c d^2 \rho_0 N_T \int_0^T dt \sigma n(\rho(t)), \quad (58.10)$$

где  $N_T$  — число колебаний электрона в канале,  $\rho_0$  — точка влета и  $T = T(\rho_0, \psi)$  — период колебания. Интегрирование по  $\rho_0$  в (58.10) ведется в пределах элементарной ячейки в поперечной плоскости, для которых при заданном  $\psi$  имеет место осевое каналирование частиц. Учитывая, что  $N_T = L/T$ , приходим к следующей окончательной формуле для  $I^-$ :

$$I^- = I_a [1 - \Phi(\psi)] + I_a \int_c d^2 \rho_0 \frac{1}{T(\rho_0, \psi)} \int_0^T dt w(\rho(t)). \quad (58.11)$$

\*) В работе [7] было обращено внимание на особую роль надбарьерных состояний во взаимодействии электронов с ядрами атомов решетки (ядерных реакций) при движении частиц в кристалле вдоль кристаллических плоскостей и показано, что выход ядерных реакций в этом случае может быть существенно меньше выхода реакций при движении частиц в аморфной среде.

Формула (58.11) показывает, что при  $\psi \lesssim \psi_c$  вклад в  $I^-$  наряду с надбарьерными дают каналированные частицы, траектории которых проходят через область  $\rho \lesssim \sqrt{u^2}$ . Оценим вклад в  $I^-$  каналированных частиц в простейшем случае, когда  $\psi \rightarrow 0$ . В этом случае все каналированные электроны проходят через область расположения ядер атомов решетки. При этом основной вклад в интеграл по времени в (58.11) дают значения  $\Delta t \sim 4\sqrt{u^2}/\psi_c$ . Период колебаний каналированных частиц по порядку величины равен  $T \sim 2\bar{a}/\psi$ , где  $\bar{a}$  — среднее расстояние между цепочками атомов; область интегрирования по  $\rho_0$  порядка  $\pi\bar{a}^2/8$ , поэтому по порядку величины

$$I^-/I_a \sim \frac{1}{8} \frac{\bar{a}}{\sqrt{u^2}}. \quad (58.12)$$

Таким образом, при  $\psi \rightarrow 0$  выход ядерных реакций в кристалле должен быть значительно больше выхода реакций в аморфной среде, причем с уменьшением температуры кристалла величина  $I^-$  растет.

На рис. 8.2 представлены результаты вычислений зависимости  $\eta(\psi) = I^-/I_a$  в случае, когда электроны падают на кристалл кремния под малым углом  $\psi$  к оси  $\langle 111 \rangle$ .

Полученные результаты показывают, что зависимости величины  $\eta$  от  $\psi$  для надбарьерных и каналированных частиц существенно различаются, поэтому экспериментальное исследование ориентационной зависимости выхода ядерных реакций в кристалле может дать информацию о динамике в конкретном кристалле различных групп частиц.

Формула (58.11) справедлива и при исследовании ориентационных зависимостей выхода ряда других процессов, обусловленных малыми прицельными параметрами (ионизация низколежащих оболочек атомов, рассеяние на большие углы и др.), с той лишь разницей, что в этих случаях функция  $w(\rho)$  должна иметь другой вид.

Приведенные выше формулы справедливы, если  $\bar{\vartheta}^2 \ll \psi_c^2$ , где  $\bar{\vartheta}^2$  — средний квадрат угла рассеяния частиц на тепловых колебаниях атомов решетки. Так как  $\bar{\vartheta}^2 \sim E^{-2}$ , а  $\psi_c^2 \sim E^{-1}$ , то при достаточно больших  $E$  условие  $\bar{\vartheta}^2 \ll \psi_c^2$  всегда может быть выполнено.

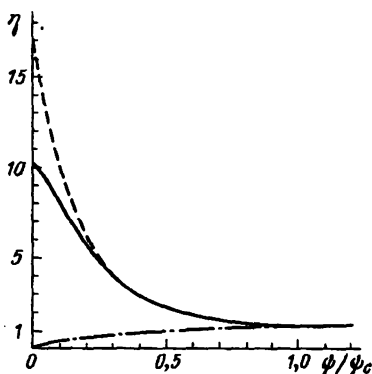


Рис. 8.2. Ориентационные зависимости выхода ядерных реакций при падении пучка электронов на кристалл кремния под малыми углами к оси  $\langle 111 \rangle$ . Сплошная линия соответствует температуре кристалла  $T=293$  К; штриховая —  $0$  К; штрихпунктирная — вклад в  $\eta$  надбарьерных частиц

## § 59. Флюктуации интеграла энергии поперечного движения

Характер движения быстрой заряженной частицы в поле непрерывного потенциала кристаллических осей или плоскостей определяется интегралом энергии поперечного движения  $\varepsilon_{\perp}$ . При значениях  $\varepsilon_{\perp}$ , меньших величины потенциальной энергии в седловых точках, движение частицы в кристалле в поперечной плоскости будет финитным по отношению к кристаллографической оси, вблизи которой происходит движение. При нарушении этого условия движение в поперечной плоскости будет инфинитным.

Вследствие рассеяния на неоднородностях потенциала решетки происходит изменение интеграла энергии поперечного движения и других интегралов движения, определяющих траекторию частицы в кристалле. Если этот процесс развивается медленно с глубиной проникновения частиц в кристалл, то его описание может быть проведено на основе адиабатического приближения. Последнее требование, однако, выполняется далеко не всегда [8]. Ниже будет показано, что в широком интервале энергий частиц при прохождении каналированного электрона через область расположения ядер атомов решетки имеют место значительные флюктуации интеграла энергии поперечного движения. Чтобы разъяснить это, определим изменение энергии поперечного движения ультрарелятивистского электрона, движущегося в кристалле в условиях плоскостного каналирования, после однократного его прохождения через область расположения ядер атомов решетки, пользуясь при этом классической механикой [8, 9].

Траектория электрона в поле непрерывного потенциала кристаллических плоскостей  $U_p(x)$  вдоль оси  $x$ , ортогональной этим плоскостям, определяется уравнением (40.5). Интеграл движения этого уравнения представляет собой энергию поперечного движения

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{1}{2} E \dot{x}^2 + U_p(x). \quad (59.1)$$

При финитном движении ( $\varepsilon_{\perp} < 0$ ) в поле  $U_p(x)$  траектория электрона ограничена значениями координаты  $|x| \leq |x_m|$ , где  $x_m$  определяется из условия  $\varepsilon_{\perp} = U_p(x_m)$ . Если  $|x_m| \gg \sqrt{u^2}$ , то на большей части траектории электрона в канале флюктуации потенциала решетки относительно его среднего значения  $U_p(x)$  не оказывают существенного влияния на траекторию (см. рис. 8.3). Эти флюктуации необходимо учитывать только на участке траектории, проходящем через область расположения ядер атомов решетки  $|x| \lesssim \sqrt{u^2}$ . Вследствие флюктуаций потенциала будет изменяться угол  $\theta$  между импульсом частицы и кристаллической плоскостью по сравнению со значением

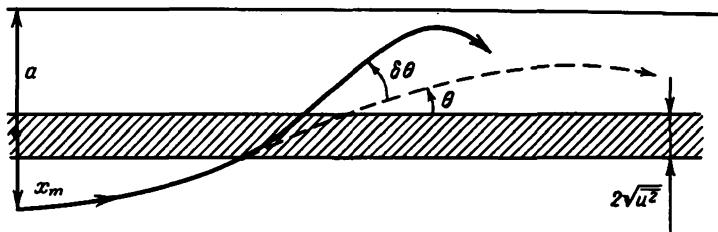


Рис. 8.3. Многократное рассеяние электронов на тепловых колебаниях атомов решетки при движении частицы вдоль кристаллографической плоскости. Жирная линия — траектория частицы, штриховая — траектория без учета влияния тепловых колебаний

угла  $\theta$  в случае, когда флуктуации отсутствуют. В последнем случае, согласно (59.1),

$$\theta = \theta_c \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_{\perp}}{U_0}}, \quad (59.2)$$

где  $\theta_c = \sqrt{2U_0/E}$  и  $U_0 = |U_p|_{\max}$ .

Используя (59.2), легко определить связь между изменением угла  $\theta$  и изменением энергии поперечного движения  $\varepsilon_{\perp}$ . Если эти изменения малы, то

$$\left| \frac{\delta \varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\perp}} \right| = 2 \frac{|\delta \theta|}{\theta_c} \frac{\sqrt{1 + \varepsilon_{\perp}/U_0}}{|\varepsilon_{\perp}|/U_0}. \quad (59.3)$$

Эта формула связывает флуктуации интеграла энергии поперечного движения с флуктуациями угла  $\theta$  между импульсом частицы и кристаллической плоскостью. Флуктуации могут иметь различное физическое происхождение. А именно, они могут быть обусловлены тепловыми колебаниями атомов решетки, неидеальностью решетки, связанной, в свою очередь, с наличием примесей, а также с тем, что ядра могут быть разными изотопами одного и того же элемента. Мы будем далее считать решетку идеальной и учитывать поэтому только наличие тепловых флуктуаций (в принципе имеется еще и рассеяние падающих электронов на электронной подсистеме решетки, которое мы здесь учитывать не будем).

Формула (59.3) справедлива, если  $|\delta \varepsilon_{\perp}| \ll |\varepsilon_{\perp}|$ . Выясним, при каких условиях это неравенство выполняется.

Среднее значение квадрата угла многократного рассеяния электрона на тепловых колебаниях атомов может быть оценено по формуле

$$\begin{aligned} (\delta \theta)^2 &= \frac{1}{2} \frac{E_s^2}{E^2} \frac{1}{L_R} \int dt a P(x(t)), \\ P(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi u^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2u^2}\right), \end{aligned} \quad (59.4)$$



где  $E_s^2 = 4\pi \cdot 137 \cdot m^2$ ,  $L_R$  — радиационная длина и  $a$  — расстояние между плоскостями. Величина  $P(x)$  определяет распределение атомов в решетке вдоль оси  $x$ . Формула (59.4) отличается от соответствующей формулы (20.11) для аморфной среды только тем, что она учитывает перераспределение плотности атомов в кристалле вдоль траектории частицы по сравнению с распределением атомов в аморфной среде.

Если  $|x_m| \gg \sqrt{u^2}$ , то траекторию частицы  $x(t)$  в (59.4) можно считать прямолинейной:  $x(t) \approx \theta t$ . Подставляя это соотношение в (59.4), находим, что после однократного прохождения электрона через область расположения ядер атомов решетки

$$(\delta\theta)^2 \approx \frac{1}{2} \frac{E_s^2}{E^2} \frac{a}{\theta L_R}. \quad (59.5)$$

Используя (59.3) и (59.5), легко показать, что зависимость  $|\delta\varepsilon_{\perp}/\varepsilon_{\perp}|$  от энергии частицы  $E$  определяется соотношением

$$\left| \frac{\delta\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\perp}} \right| \sim E^{-1/4}. \quad (59.6)$$

Рассмотрим в качестве примера движение электрона в кристалле кремния вдоль плоскости (110). При этом

$$\left| \frac{\delta\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\perp}} \right| \approx \frac{2}{5} \frac{(1 + \varepsilon_{\perp}/U_0)^{1/4}}{|\varepsilon_{\perp}/U_0|} [E(\text{ГэВ})]^{-1/4}, \quad (59.7)$$

где  $E$  (ГэВ) — энергия электрона. Формула (59.7) показывает, что условие  $|\delta\varepsilon_{\perp}| \ll |\varepsilon_{\perp}|$  может быть выполнено только в области очень высоких энергий частиц. В области же энергий электронов порядка нескольких ГэВ, согласно (59.7), при  $\varepsilon_{\perp} \sim 1/2 U_0$  имеем:  $\delta\varepsilon_{\perp} \sim \varepsilon_{\perp}$ . Это означает, что после прохождения частиц через область расположения ядер атомов решетки происходит значительное их перераспределение по поперечным энергиям. Иными словами, в этом случае траектория электрона испытывает значительные изменения по сравнению с траекторией в поле  $U_p(x)$ .

При  $\varepsilon_{\perp} \approx -U_0$  траектория электрона  $x(t)$  расположена в области  $|x| \lesssim \sqrt{u^2}$ . Ясно, что в этом случае вследствие многократного рассеяния быстро произойдет переход частицы из области  $\varepsilon_{\perp} \approx -U_0$  в область  $\varepsilon_{\perp} \gg -U_0$ , т. е. длительное движение электрона в области  $|x| \sim \sqrt{u^2}$  невозможно.

Устойчивость траектории каналированного электрона повышается с ростом энергии частицы  $E$ . Происходит это, однако, весьма медленно.

Для надбарьерных частиц ( $\varepsilon_{\perp} > 0$ ), согласно (59.7), при  $\varepsilon_{\perp} > U_0$  устойчивость траектории по отношению к многократному рассеянию на тепловых колебаниях атомов решетки повышается.

Аналогичные результаты могут быть получены и в случае аксиального движения электрона в канале. Действительно, приведенные формулы могут быть непосредственно применены к этому случаю, если электрон проходит через область расположения ядер атомов в цепочке. При этом величину  $aP(x)$  в (59.4) следует заменить на  $\bar{a}^2 P(\rho)$ , где  $\bar{a}$  — среднее расстояние между цепочками атомов и  $P(\rho)$  — вероятность нахождения ядра атома на расстоянии  $\rho$  от оси цепочки (см. формулу (58.2)). Подставляя (58.2) в (59.4), находим, что при  $\varepsilon_{\perp} > -U_0$

$$(\delta\psi)^2 \approx \frac{1}{2} \frac{E_s^2}{E^2} \frac{\bar{a}}{\psi L_R} \frac{\bar{a}}{2\pi\sqrt{u^2}} \exp\left(-\frac{y_{\min}^2}{2u^2}\right), \quad (59.8)$$

где  $y_{\min}$  — минимальное расстояние между электроном и цепочкой.

Формула (59.8) показывает, что при аксиальном каналировании многократное рассеяние частиц на тепловых колебаниях атомов приводит к более интенсивному перераспределению по поперечным энергиям частиц, проходящих через область расположения ядер атомов решетки ( $y_{\min} \lesssim \sqrt{u^2}$ ), чем при «планарном» движении частиц.

Таким образом, в широком интервале энергий ( $E$  порядка нескольких ГэВ) движение электронов в кристалле в условиях аксиального и планарного каналирования является весьма неустойчивым по отношению к многократному рассеянию частиц на тепловых колебаниях атомов решетки. Это обстоятельство необходимо учитывать при изучении многих физических процессов, сопровождающих прохождение электронов высоких энергий через кристаллы вдоль кристаллографических осей или плоскостей таких, например, как деканалирование и изучение при каналировании.

## § 60. Эффекты деканалирования и реканалирования

В настоящем параграфе мы обратим внимание на некоторые общие особенности процесса прохождения заряженных частиц высоких энергий через кристаллы с учетом влияния многократного рассеяния на движение. При этом движение частиц в кристалле мы будем рассматривать в рамках классической механики, что оправдано, если энергии частиц достаточно велики. Кроме того, основное внимание мы обратим на случай прохождения через кристалл частиц с энергией порядка нескольких ГэВ, поскольку для частиц такой энергии флуктуации траектории, связанные с многократным рассеянием, могут быть значительными (см. § 59).

В поле непрерывного потенциала кристаллических осей и плоскостей сохраняется энергия поперечного движения

частицы, поэтому характер движения частицы в таком поле будет определяться начальными условиями. Вследствие многократного рассеяния на неоднородностях потенциала решетки, а также на электронной подсистеме кристалла, происходит изменение энергии поперечного движения. При этом возможны переходы из подбарьерных в надбарьерные состояния и наоборот. Первый из этих процессов носит название процесса деканализирования, второй — процесса реканализирования частиц.

Если движущаяся в кристалле частица проходит через область расположения ядер атомов решетки, то, как отмечалось выше, многократное рассеяние наиболее интенсивно происходит на тепловых колебаниях атомов решетки. При этом многократное рассеяние проявляется по-разному для положительно и отрицательно заряженных частиц. Связано это с тем, что положительно заряженная частица испытывает действие случайной силы, обусловленной тепловым разбросом положений атомов в решетке, находясь в максимуме непрерывного потенциала кристаллической оси или плоскости, вблизи которой происходит движение. Многократное рассеяние в этом случае может привести к перераспределению частиц только между надбарьерными состояниями. В случае же отрицательно заряженной частицы многократное рассеяние на тепловых колебаниях атомов кристалла происходит в области, где непрерывный потенциал оси или плоскости минимален. При этом возможен переход частиц из надбарьерных состояний в подбарьерные и наоборот.

Рассмотрим в качестве примера движение быстрого позитрона и электрона в поле непрерывного потенциала кристаллических плоскостей с учетом многократного рассеяния на тепловых колебаниях атомов. Энергия поперечного движения в поле непрерывного потенциала кристаллических плоскостей определяется соотношением (59.1). Существенные изменения этой величины будут иметь место при прохождении частицы через область расположения ядер атомов решетки, т. е. через области координаты  $x$ , в которой  $|x - x_n| \lesssim \sqrt{u^2}$ , где  $x_n$  — координата пересечения  $n$ -й плоскости с осью  $x$ . В этой области значений  $x$  соотношение (59.1) может быть записано в виде

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{1}{2} E \dot{x}^2 + U_p(0). \quad (60.1)$$

Соотношение (60.1) фактически определяет значение скорости частицы  $\dot{x}$  в области расположения ядер атомов решетки:

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{E} (\varepsilon_{\perp} - U_p(0))}.$$

Вследствие многократного рассеяния это значение скорости изменяется. При этом, как легко проверить, в случае позитронов при любом изменении величины  $\dot{x}$  выполняется условие

$$\varepsilon_{\perp} \geq U_p(0),$$

при котором движение является надбарьерным.

В случае же электронов в результате многократного рассеяния величина  $\varepsilon_{\perp}$  может изменить знак, т. е. для таких частиц возможен захват из надбарьерных в подбарьерные состояния и переход из подбарьерных в надбарьерные состояния.

Заметим, что при  $\varepsilon_{\perp} < U_p(0)$  позитроны не подходят на близкие расстояния к ядрам атомов решетки, поэтому многократное рассеяние таких частиц на тепловых колебаниях атомов оказывается подавленным по сравнению со случаем, когда  $\varepsilon_{\perp} > U_p(0)$ . Основной вклад в изменение энергии поперечного движения в этом случае будет вносить многократное рассеяние на электронной подсистеме решетки. Средние углы многократного рассеяния частицы на электронах среды много меньше средних углов многократного рассеяния на тепловых колебаниях атомов, поэтому при  $\varepsilon_{\perp} < U_p(0)$  движение позитрона в кристалле оказывается более устойчивым, чем при  $\varepsilon_{\perp} > U_p(0)$ . Иными словами, при  $\varepsilon_{\perp} < U_p(0)$  позитрон пройдет существенно большее расстояние в кристалле (чем при  $\varepsilon_{\perp} > U_p(0)$ ), прежде чем значительно изменится его поперечная энергия. Аналогичная картина имеет место и при прохождении позитронов через кристалл вдоль одной из кристаллических осей.

Особый интерес представляет случай прохождения через кристалл вдоль одной из его осей ультрарелятивистских электронов, поскольку в этом случае существует три группы частиц, характер движения которых существенно различается. Это — каналированные электроны, траектории которых проходят через область расположения ядер атомов решетки (частицы с малым значением момента количества движения  $M$  относительно оси цепочки), каналированные электроны, траектории которых не проходят через область расположения ядер атомов решетки (частицы с большим значением  $M$ ), и надбарьерные частицы.

Частицы первой группы значительно чаще, чем надбарьерные частицы, проходят через область расположения ядер атомов кристалла и больше времени проводят в этой области, поэтому такие частицы интенсивно рассеиваются и деканализуют.

Многократное рассеяние частиц второй группы происходит, в основном, на электронной подсистеме решетки, поэтому может сложиться впечатление, что движение таких частиц является весьма устойчивым. В действительности, однако, оказывается, что это не так. Дело в том, что основная часть частиц данной группы имеет малые значения поперечной

энергии  $\varepsilon_{\perp}$ , и, следовательно, даже небольшие флуктуации величины  $\varepsilon_{\perp}$  могут перевести частицу из подбарьерного в надбарьерное состояние, а надбарьерные частицы, в свою очередь, уже могут проходить через область расположения ядер атомов решетки, в которой многократное рассеяние является значительным. Кроме того, электроны с малым значением  $\varepsilon_{\perp}$  движутся в области, где влияние на движение может оказать асимметрия непрерывного потенциала цепочки, благодаря чему возможны такие изменения траектории, при которых электрон будет проходить через область расположения ядер атомов решетки. К такому же эффекту приводит и учет влияния на траекторию каналированного электрона многократного рассеяния на электронной подсистеме решетки (непосредственное моделирование движения каналированного электрона с учетом этого фактора показывает, что, как правило, после нескольких колебаний электрона в канале он проходит через область расположения ядер атомов [10]). Таким образом, такое движение, при котором каналированный электрон не проходит через область расположения ядер атомов кристалла, оказывается неустойчивым по отношению к действию на частицу случайных сил, связанных с электронной подсистемой решетки и асимметрией непрерывного потенциала цепочки.

Надбарьерные частицы вследствие многократного рассеяния на тепловых колебаниях атомов, а при  $0 < \varepsilon_{\perp} \ll U_0$  и вследствие рассеяния на электронной подсистеме решетки могут частично переходить в подбарьерные состояния. Вероятность этого процесса, однако, оказывается меньше вероятности процесса деканалирования. Это означает, что начиная с некоторой толщины кристалла должно происходить накопление надбарьерных частиц, при котором доля частиц, находящихся в подбарьерном состоянии, будет мала. Имеющиеся экспериментальные данные по угловым распределениям рассеянных частиц [11], спектрам излучения [12], эмиссии вторичных электронов из кристаллов [13], выходу электроядерных реакций [14] и другие данные показывают, что для электронов с энергией порядка 1 ГэВ, движущихся в кристалле кремния толщиной в несколько сотен микрон вдоль одной из кристаллографических осей, доля частиц, находящихся в подбарьерном состоянии, составляет менее 1%. В [1] было измерено угловое распределение  $\pi^-$ -мезонов с энергией 15 ГэВ, прошедших через кристалл германия толщиной 4,2 мм вдоль оси  $\langle 110 \rangle$ , и показано, что распределение вышедших из кристалла частиц имеет гауссов вид со средним квадратом угла рассеяния, близким к среднему квадрату угла рассеяния в разориентированном кристалле. Если пучок с таким начальным распределением направить на кристалл в обратном направлении, то, как легко проверить, в подбарьерные состояния будет захвачено около 1% частиц, тогда как доля частиц, совершающих надбарьерное движение с  $0 < \varepsilon_{\perp} \lesssim U_0$ , будет составлять около 7% всех падающих на кристалл частиц.

Изложенные выше результаты носят качественный характер. Применительно к электронам эти результаты справедливы в широком интервале энергий частиц: от энергий порядка сотен МэВ до энергий порядка несколько десятков ГэВ. При больших энергиях повышается устойчивость движения частиц в кристалле по отношению к многократному рассеянию. При меньших энергиях становятся существенными квантовые эффекты во взаимодействии, благодаря которым также повышается устойчивость движения частиц [15].

## § 61. Деканализирование как диффузия в случайной среде

Многократное рассеяние быстрой заряженной частицы в аморфной среде описывается диффузионным уравнением (20.13) с постоянным коэффициентом диффузии  $q$ . Если движение происходит в случайно неоднородной среде, то входящий в (20.13) коэффициент диффузии следует считать случайной величиной. Как правило, интерес представляет функция распределения, усредненная по масштабам, превышающим характерные корреляционные масштабы коэффициента диффузии.

Проведение процедуры усреднения показывает, что уравнение для усредненной по флуктуациям коэффициента диффузии функции  $\langle f \rangle$  наряду с традиционным диффузионным

членом  $\langle q \rangle \frac{\partial^2}{\partial g^2} \langle f \rangle$  содержит слагаемые более сложной структуры, связанные с высшими моментами  $\langle q^k \rangle$ ,  $k \geq 2$ .

В ряде случаев высшие моменты играют существенную роль, как это имеет место, например, в проблеме перемежаемости полей в случайных средах [16]. Ниже мы получим кинетическое уравнение, описывающее многократное рассеяние в случайно неоднородной среде, и покажем, что процесс деканализирования ультрарелятивистских электронов в кристалле может быть рассмотрен как диффузия в случайно неоднородной среде [17].

При падении пучка электронов на кристалл вдоль одной из кристаллических осей (оси  $z$ ) возможно явление каналирования, при котором частицы движутся в каналах, образованных печочками атомов, совершая движение типа «винтового» относительно оси канала. Характер движения такой частицы в канале определяется энергией поперечного движения  $\epsilon_{\perp}$ . Вследствие многократного рассеяния на тепловых колебаниях атомов\* происходит перераспределение частиц между различными состояниями поперечной энергии. При изучении этого процесса обычно предполагается, что движение частицы в канале является периодическим и что процесс деканализирования развивается адиабатически с глубиной проникновения частиц в кристалл (см., например, [18]). В предыдущих параграфах,

\* Многократным рассеянием на электронной подсистеме кристалла мы здесь пренебрегаем.

однако, мы видели, что при аксиальном каналировании электронов возможно явление динамического хаоса, при котором движение частицы в канале является хаотическим, и что в широком интервале энергий электронов при прохождении частиц через область расположения ядер атомов решетки имеют место значительные флуктуации интеграла энергии поперечного движения. В этой связи возникают вопросы о том, как учитывать эти факторы и как они отразятся на кинетике процесса деканалирования.

Изменение энергии поперечного движения электронов происходит, в основном, при их прохождении через область, линейный размер которой порядка амплитуды тепловых колебаний атомов в решетке  $\sqrt{u^2}$ , тогда как на расстояниях от оси канала больших, чем  $\sqrt{u^2}$ , величина  $\epsilon_{\perp}$  сохраняется. Таким образом, при каналировании электронов изменение поперечной энергии будет происходить только на небольших участках траектории (ширина канала намного больше  $\sqrt{u^2}$ ), проходящих через область тепловых колебаний атомов

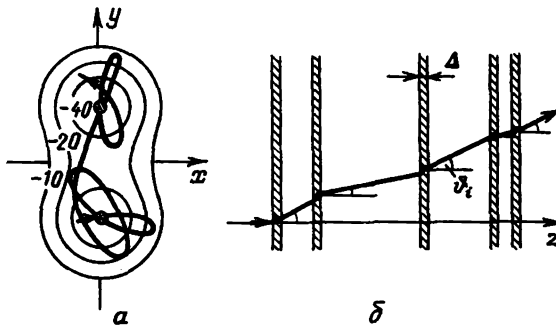


Рис. 8.4. Движение каналированного электрона в кристалле кремния вдоль оси  $\langle 110 \rangle$  в условиях динамического хаоса (а) и многократное рассеяние в случайно неоднородной среде (б)

(рис. 8.4, а). При периодическом движении электроны либо вообще не попадают в эту область, либо попадают в нее через равные промежутки времени, причем период определяется величиной  $\epsilon_{\perp}$ . При хаотическом движении электроны имеют возможность попасть в область  $\sim \sqrt{u^2}$ , причем интервалы времени между последовательными прохожденими данной области являются случайными. Следовательно, в случае хаотического движения электрона в канале мы приходим к задаче о многократном рассеянии частицы в случайно неоднородной среде (см. рис. 8.4, б).

В качестве простейшей модели рассеяния в случайно неоднородной среде рассмотрим многократное рассеяние при

прохождении частицы через набор пластинок одинаковой толщины  $\Delta$ , разделенных вакуумными зазорами случайной величины. Стохастические свойства такой среды будем описывать пуассоновским случайным процессом  $\zeta(\tau) = \sum_i g(\tau - \tau_i)$ ,  $g(\tau) = \Theta(\tau) \Theta(\Delta - \tau)$ , где  $\tau_i$  — момент влета частицы в  $i$ -ю пластинку и  $\Theta(\tau)$  — ступенчатая функция Хевисайда; скорость частицы полагается равной единице. Величины  $\tau_i$  распределены на интервале  $(0, t)$  так, что их число  $n$  подчинено закону Пуассона с параметром  $\bar{n} = vt$ , причем толщина пластинки  $\Delta$  и параметр  $v$  должны удовлетворять условию  $\Delta \ll v^{-1}$ , что отвечает невозможности проникновения одной пластинки вещества в другую.

Стохастическое уравнение, описывающее эволюцию одной из двух независимых компонент угла рассеяния  $\mathfrak{g}(\tau) = (\mathfrak{g}_x(\tau), \mathfrak{g}_y(\tau))$ , имеет вид

$$\dot{\mathfrak{g}}(\tau) = \eta(\tau)\zeta(\tau), \quad (61.1)$$

где  $\eta(\tau)$  — белый шум, обуславливающий диффузионный характер рассеяния частицы в каждой пластинке.

Функция распределения частиц по углам  $\mathfrak{g}$  к моменту времени  $t$  определяется следующим образом:

$$f(\mathfrak{g}, t) = \langle \delta\left(\mathfrak{g} - \int_0^t d\tau \eta(\tau)\zeta(\tau)\right) \rangle_{\eta, \zeta}, \quad (61.2)$$

где  $\langle \dots \rangle_{\eta, \zeta}$  означает усреднение по белому шуму и по реализациям процесса  $\zeta(\tau)$ , причем порядок усреднений переставим в силу статистической независимости этих процессов. Усреднение по белому шуму  $\langle \dots \rangle_{\eta}$  выполняется согласно правилам Вика со связью, задаваемой парным коррелятором  $\langle \eta(\tau)\eta(\tau') \rangle = 2D\delta(\tau - \tau')$  [19], а усреднение по реализациям пуассоновского процесса определяется соотношением

$$\langle \dots \rangle_{\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^n}{n!} e^{-vt} \int_0^t d\tau_1 \dots \int_0^t d\tau_n \dots$$

Используя преобразование Фурье, получим после явного выполнения усреднения по белому шуму следующее выражение для фурье-компоненты  $f_k(t) = \int d\mathfrak{g} f(\mathfrak{g}, t) \exp(-ik\mathfrak{g})$ :

$$f_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^n}{n!} e^{-vt} \int_0^t d\tau_1 \dots \int_0^t d\tau_n \exp\left[-k^2 D \sum_{i,j=1}^n \varphi(|\tau_i - \tau_j|)\right], \quad (61.3)$$

где  $\varphi(\tau) = (\Delta - \tau)\Theta(\Delta - \tau)$ ;  $n$ -кратный интеграл в этой формуле представляет собой конфигурационный интеграл одномерного газа частиц, взаимодействующих по закону  $\varphi(\tau)$  и занимающих «объем»  $t$ . В случае, когда расстояние между пластинками



велико по сравнению с их толщиной ( $v\Delta \ll 1$ ), мы имеем дело с одномерным газом не взаимодействующих между собой частиц, находящихся в поле  $\phi(0) = \Delta$ . При этом функция распределения имеет вид

$$f(\vartheta, t) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ik\vartheta} \exp [vt(e^{-k^2 D\Delta} - 1)]. \quad (61.4)$$

Это распределение является негауссовым и удовлетворяет кинетическому уравнению типа линейного уравнения Больцмана:

$$\frac{d}{dt} f(\vartheta, t) = \frac{v}{\sqrt{4\pi D\Delta}} \int d\vartheta' [f(\vartheta', t) - f(\vartheta, t)] \exp \left[ -\frac{(\vartheta' - \vartheta)^2}{4D\Delta} \right]. \quad (61.5)$$

Анализ формулы (61.4) показывает, что при  $vt \gg 1$  функция распределения частиц по углам приобретает гауссов вид. При этом уравнение (61.5) переходит в традиционное диффузионное уравнение

$$\frac{d}{dt} f = Dv\Delta \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} f \quad (61.6)$$

с усредненным коэффициентом диффузии, в  $(v\Delta)$  раз меньшим, чем коэффициент диффузии в однородной среде (см. уравнение (20.13)).

Таким образом, только при  $vt \gg 1$  многократное рассеяние частицы в наборе случайно отстоящих друг от друга пластинок можно считать гауссовым процессом. Кинетика в этом случае описывается диффузионным уравнением (61.6) с перераспределенным по отношению к однородной среде коэффициентом диффузии. В противоположном случае, когда  $vt \lesssim 1$ , распределение частиц по углам определяется формулой (61.4).

Применительно к проблеме деканализирования ультрарелятивистских электронов полученные выше результаты позволяют сделать следующие выводы. В случае стохастического движения электрона в канале процесс деканализирования может быть описан как диффузия в случайно неоднородной среде. Статистическая структура такой диффузии имеет более сложный характер по сравнению с диффузией, определяемой уравнением типа (20.13).

При однократном прохождении электрона через область тепловых колебаний атомов решетки флюктуация интеграла энергии поперечного движения  $(\delta\varepsilon_{\perp})^2$  может превысить величину  $\varepsilon_{\perp}^2$ , в результате чего электрон быстро покидает канал. Процесс деканализирования в этом случае развивается на интервале времени  $t \sim v^{-1}$ , на котором распределение частиц по углам отличается от гауссова. Такая ситуация имеет место, например, при канализировании электронов с энергией  $E = 0,1$  ГэВ в кристалле кремния вдоль оси  $\langle 110 \rangle$ .

С ростом энергии частицы  $E$  величина  $(\overline{\delta\varepsilon_{\perp}})^2$  уменьшается. При этом, если  $(\delta\varepsilon_{\perp})^2 \sim \varepsilon_{\perp}^2$ , то электрон, прежде чем покинуть канал, пройдет несколько раз через область тепловых колебаний атомов. Условие адиабатичности процесса деканализирования в этом случае не выполняется; вместе с тем изучение этого процесса может быть проведено на основе уравнения диффузионного типа (61.4) с коэффициентом диффузии, усредненным по реализациям стохастических траекторий частиц в канале. Причем эти реализации определяются как динамической стохастизацией, так и флуктуациями интеграла энергии поперечного движения.

При  $(\delta\varepsilon_{\perp})^2 \ll \varepsilon_{\perp}^2$  процесс деканализирования развивается адиабатически с глубиной проникновения частиц в кристалле. Этот процесс может быть описан на основе стандартного диффузионного уравнения с коэффициентом диффузии, усредненным по стохастическим траекториям, порождаемым хаотической динамикой частиц в канале (флуктуациями интеграла энергии поперечного движения  $(\delta\varepsilon_{\perp})^2$  в этом случае можно пренебречь).

## § 62. Учет влияния тепловых колебаний атомов на излучение движущейся в кристалле частицы

При движении ультрарелятивистского электрона или позитрона в кристалле под малым углом к одной из кристаллических осей или плоскостей, как мы видели в гл. 4, проявляются когерентные и интерференционные эффекты при излучении, благодаря которым спектральная плотность излучения содержит максимумы и высокую интенсивность излучения в максимумах. Эти эффекты обусловлены периодичностью расположения атомов в решетке. Вследствие термодинамических флуктуаций, однако, положения атомов в кристалле всегда имеют некоторый разброс относительно своих равновесных положений, поэтому необходимо знать, как этот фактор сказывается на излучении частицы. В гл. 4 этот вопрос был рассмотрен в рамках борновского приближения квантовой электродинамики. При этом было показано, что учет тепловых колебаний атомов приводит к уменьшению интенсивности излучения в интерференционных максимумах и к появлению некогерентные эффекты при излучении.

Полученные в гл. 4 результаты справедливы, если поле кристалла слабо возмущает движение частицы, т. е. если движение частицы в кристалле можно считать близким к прямолинейному, и, кроме того, если угол рассеяния на длине когерентности мал по сравнению с характерным углом излучения релятивистской частицы. Влияние на излучение искривления траектории частицы в поле непрерывного потенциала

кристаллических осей и плоскостей мы рассматривали в гл. 6 и 7, где показано, что при движении электронов и позитронов вдоль кристаллических осей или плоскостей спектры их излучения существенно отличаются от соответствующих результатов борновской теории. Мы теперь рассмотрим вопрос о влиянии тепловых колебаний атомов на излучение ультрарелятивистских частиц в случае, когда нарушаются условия применимости борновской теории когерентного взаимодействия частиц с атомами кристалла. Основное внимание при этом мы обратим на особенности излучения в области больших частот, где процессы, связанные с некогерентным излучением, являются определяющими.

Процесс излучения быстрой частицы в веществе разывается в большой, растущей с энергией, пространственной области вдоль импульса частицы. Если при этом движение происходит в кристалле под малым углом к одной из кристаллических осей или плоскостей и в пределах длины когерентности частица сталкивается с большим числом атомов, то движение и излучение могут быть описаны в рамках квазиклассического приближения. При этом спектрально-угловая плотность излучения с учетом отдачи при излучении определяется формулой (17.4). Эта формула должна быть усреднена по тепловому разбросу положений атомов в решетке и по различным траекториям частиц в кристалле. Мы ограничимся здесь рассмотрением простейшего случая дипольного излучения. В этом приближении процедура усреднения спектральной плотности излучения существенно упрощается и может быть связана с процедурой нахождения квадрата угла рассеяния частицы в кристалле, использованной в § 57.

В дипольном приближении спектральная плотность излучения (17.4) приобретает вид

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{e^2}{4\pi} \frac{E^2 + E'^2}{EE'} \omega \int_{\delta'}^{\infty} \frac{dv}{v^2} \left[ 1 - 2 \frac{\delta'}{v} \left( 1 - \frac{\delta'}{v} \right) \left( 1 - \frac{\omega^2}{E^2 + E'^2} \right) \right] |\mathbf{W}(v)|^2, \quad (62.1)$$

где  $\delta' = \omega m^2 / 2EE'$  и  $\mathbf{W}(v)$  — фурье-компонента ускорения частицы. Мы рассмотрим случай, когда длина когерентности  $l = 1/\delta'$  велика по сравнению с постоянной решетки  $a$ . При выполнении этого условия можно считать, что скорость частицы меняется скачками в результате столкновений с каждым атомом, так что

$$|\mathbf{W}(v)|^2 = \sum_{n,k} \mathfrak{g}_n \mathfrak{g}_k \exp [iv(t_n - t_k)], \quad (62.2)$$

где  $\mathfrak{g}_n$  — угол рассеяния при столкновении с  $n$ -м атомом и  $t_n$  — момент времени, когда произошло столкновение.

Таким образом, в дипольном приближении процедура усреднения спектральной плотности излучения распространяется на величину (62.2), которая отличается от соответствующего

выражения для квадрата угла рассеяния (57.1) только экспоненциальным фактором под знаком суммы.

При выполнении условия  $a\delta' \ll 1$  флюктуации интервалов времени между последовательными соударениями частицы с атомами решетки, связанные с тепловым разбросом положений атомов, малы, поэтому, как и при вычислении среднего значения квадрата угла рассеяния, процедура усреднения формулы (62.2) по тепловым колебаниям атомов будет распространяться только на величины  $\mathfrak{D}_n \mathfrak{D}_k$ . Учитывая эту аналогию, легко показать, что для частицы, движущейся по траектории  $\rho(t)$  в поперечной плоскости, среднее значение величины  $|\mathbf{W}(\nu)|^2$  по тепловым колебаниям атомов будет иметь вид

$$\langle |\mathbf{W}(\nu)|^2 \rangle = \frac{1}{d} \int dt A(\rho(t)) + \left| \int dt e^{i\nu t} \ddot{\rho}(t) \right|^2, \quad (62.3)$$

где  $A(\rho)$  определяется формулой (57.4),  $d$  — расстояние между атомами вдоль кристаллической оси, вблизи которой происходит движение, и  $\rho(t)$  — траектория в поле непрерывного потенциала цепочки атомов.

Формула (62.3) показывает, что учет влияния тепловых колебаний атомов на излучение движущейся в кристалле частицы приводит не только к изменению непрерывного потенциала цепочки атомов, но и к появлению некогерентные эффекты при излучении.

Для нахождения интенсивности излучения проходящего через кристалл пучка формула (62.3) должна быть усреднена по различным траекториям. В общем виде, как отмечалось в § 57, выполнить такое усреднение затруднительно, поэтому рассмотрим некоторые предельные случаи, в которых процедура усреднения может быть выполнена аналитически.

Если среднее поле кристаллической решетки  $U(\rho)$  слабо возмущает движение частицы, то траектория в поперечной плоскости близка к прямолинейной. Среднее значение спектральной плотности излучения при этом определяется формулой

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \frac{1}{L_x L_y} \int d^2 \rho_0 \frac{d\mathcal{E}}{d\omega}, \quad (62.4)$$

где  $\rho_0$  — точка влета и  $d\mathcal{E}/d\omega$  — спектр излучения частицы, движущейся по траектории  $\rho(t, \rho_0)$ , близкой к прямолинейной.

Подставляя (62.3) в (62.4), находим, что в первом приближении по потенциалу среднее значение спектральной плотности излучения совпадает с соответствующим результатом борновской теории когерентного излучения быстрых частиц в кристалле:

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle_{\text{B}} = Ln\omega \left( \frac{d\sigma_n^{(B)}}{d\omega} + \frac{d\sigma_c^{(B)}}{d\omega} \right), \quad (62.5)$$

где  $d\sigma_c^{(B)}$  и  $d\sigma_n^{(B)}$  — когерентная и некогерентная части поперечника излучения (см. формулы (27.10) и (27.11)).

Формула (62.5) справедлива, если  $\psi \gg \psi_c$ . При нарушении этого условия необходимо учитывать влияние на излучение отклонения траектории частицы от прямолинейной. Влияние этого фактора на когерентную часть поперечника излучения было рассмотрено в гл. 7. Покажем, что при  $\psi \lesssim \psi_c$  отклонение траектории частицы от прямолинейной может оказать значительное влияние и на некогерентную часть поперечника излучения.

Рассмотрим вначале излучение движущейся в кристалле надбарьерной частицы.

Заметим предварительно, что существует довольно широкая область частот, в которой некогерентная часть поперечника излучения вносит определяющий вклад в излучение. Так, из результатов борновской теории когерентного излучения вытекает, что в области частот, удовлетворяющей условиям  $2R/\psi \gg 1/\delta' \gg a$ , основной вклад в излучение вносит сечение  $d\sigma_n^{(B)}$  (величина  $d\sigma_c^{(B)}$  в этой области частот мала, см. рис. 4.5). Ясно, что аналогичная ситуация должна иметь место и при  $\psi \lesssim \psi_c$ , когда необходим учет влияния на излучение отклонения траектории частицы от прямолинейной.

Надбарьерная частица при движении в кристалле последовательно сталкивается с различными цепочками атомов, расположенными параллельно оси  $z$ . При этом если движение происходит вдали от плотно упакованных атомами кристаллических плоскостей, то эти столкновения можно рассматривать как случайные. Если при этом длина  $l$ , на которой формируется излучение, будет мала по сравнению с длиной свободного пробега частицы между последовательными столкновениями с цепочками, то можно пренебречь интерференцией излучений от различных цепочек. При этом среднее значение входящей в (62.1) величины  $|\mathbf{W}(\nu)|^2$  будет определяться только особенностями взаимодействия частицы с полем отдельной цепочки атомов  $U_r(\rho)$ :

$$\langle |\mathbf{W}(\nu)|^2 \rangle = \mathcal{N}_r \int \frac{db}{a} \left\{ \frac{1}{a} \int dt A(\rho_r(t)) + \left| \int dt e^{i\nu t} \ddot{\rho}_r(t) \right|^2 \right\}, \quad (62.6)$$

где  $\mathcal{N}_r$  — число столкновений с цепочками атомов и  $\rho_r(t)$  — траектория частицы в поле отдельной цепочки атомов. Переходя в первом слагаемом (62.6) от интегрирования по времени к интегрированию по  $\rho$  и учитывая, что  $\mathcal{N}_r = Ln\psi \bar{a}d$ , приходим к следующей формуле для этого слагаемого:

$$\mathcal{N}_r \int \frac{db}{a} \frac{1}{a} \int dt A(\rho_r(t)) = 2\pi Ln \int_{\rho^*}^{\infty} \rho d\rho A(\rho). \quad (62.7)$$

Здесь использованы обозначения § 57.

Таким образом, согласно (62.1) и (62.6), среднее значение спектральной плотности излучения надбарьерной частицы может быть представлено в виде суммы двух слагаемых, определяющих некогерентные и когерентные эффекты при излучении:

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle_n + \left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle_c, \quad (62.8)$$

где

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle_n = \frac{2Lne^2}{3m^2} \left( 1 + \frac{E'^2}{E^2} + \frac{\omega^2}{2E^2} \right) E^2 \int_{\rho'}^{\infty} \rho d\rho A(\rho), \quad (62.9)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle_c &= L \frac{nde^2\psi}{4\pi} \frac{E^2 + E'^2}{EE'} \omega \int_{\delta'}^{\infty} \frac{d\nu}{\nu^2} \times \\ &\times \left[ 1 - 2 \frac{\delta'}{\nu} \left( 1 - \frac{\delta'}{\nu} \right) \left( 1 - \frac{\omega^2}{E^2 + E'^2} \right) \right] \int_{-\infty}^{+\infty} db \left| \int dt e^{i\nu t} \ddot{\rho}(t) \right|^2. \end{aligned} \quad (62.10)$$

В области частот, удовлетворяющих условиям  $2R/\psi \gg l \gg a$ , второе слагаемое в (62.8) мало. В этой области частот основной вклад в излучение вносит первое слагаемое (62.8), определяющее некогерентные эффекты при излучении.

Для электронов (и для позитронов при  $\varepsilon_{\perp} > U_r(0)$ ) в (62.9) может быть выполнено интегрирование по  $\rho$ . При этом, как легко проверить, некогерентная часть спектральной плотности излучения совпадает с соответствующим результатом борновской теории:

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = Ln\omega \frac{d\sigma_n^{(B)}}{d\omega}. \quad (62.11)$$

Для позитронов при  $\varepsilon_{\perp} < U_r(0)$ , согласно (62.9), среднее значение спектральной плотности излучения быстро уменьшается с уменьшением  $\psi$  и при  $\psi < \psi_c$  оказывается существенно меньшим соответствующего результата борновской теории. Связано это с тем, что при  $\psi < \psi_c$  позитроны не могут подходить на близкие расстояния к оси цепочки, где градиенты потенциала цепочки атомов максимальны.

Полученные выше формулы справедливы, если флюктуации траектории частицы на всей толщине кристалла малы. Если, однако, процесс нарастания флюктуаций развивается адиабатически (по существу требуется адиабатичность развития процесса в пределах длины когерентности) и известна функция распределения частиц по величинам, определяющим

траекторию, то полученные формулы могут быть использованы и для изучения излучения быстрых частиц в более толстых кристаллах, для этого требуется только усреднить спектр излучения по заданному распределению частиц. При этом в случае надбарьерных частиц приходим к следующему выражению для спектральной плотности излучения:

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle_L = \int_0^L dz \int d\varepsilon_{\perp} f(\varepsilon_{\perp}, L) \left\langle \frac{d^2\mathcal{E}}{dz d\omega} \right\rangle, \quad (62.12)$$

где  $\langle d^2\mathcal{E}/dz d\omega \rangle$  — отнесенная к единице длины спектральная плотность излучения надбарьерной частицы при заданном значении  $\varepsilon_{\perp}$  и  $f(\varepsilon_{\perp}, z)$  — функция распределения частиц по  $\varepsilon_{\perp}$  на глубине  $z$ .

Для надбарьерных электронов, как отмечалось выше, спектральная плотность излучения в области частот, удовлетворяющая условиям  $2R/\psi \gg l \gg a$ , определяется некогерентной частью поперечника излучения, которая не зависит от  $\varepsilon_{\perp}$ . Поэтому даже при значительном перераспределении таких частиц по поперечным энергиям спектр излучения будет определяться формулой

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle_L = Ln\omega \frac{d\sigma_n^{(B)}}{d\omega}. \quad (62.13)$$

Подчеркнем, что этот результат справедлив, если частица на всем пути в кристалле является надбарьерной и, кроме того, если на всем пути электрона в кристалле можно пренебречь вкладом в излучение слагаемого, определяющего когерентные эффекты при излучении.

Для позитронов, движущихся в кристалле вдоль одной из кристаллографических осей, существенное перераспределение частиц по  $\varepsilon_{\perp}$  происходит на длине, по порядку величины равной длине деканализирования. Для позитронов эта длина оказывается существенно большей, чем для электронов: так, при энергии частиц порядка 1 ГэВ в кристалле кремния длина деканализирования для позитронов составляет несколько миллиметров, тогда как для электронов она порядка нескольких десятков микрон [13, 14, 20]. Поэтому даже в довольно толстых кристаллах (кристаллах толщиной в несколько сотен микрон) спектральная плотность излучения позитронов будет определяться начальным распределением частиц по поперечным энергиям. Так, например, если параллельный пучок позитронов влетает в кристалл вдоль кристаллографической оси (оси  $z$ ), то распределение частиц по  $\varepsilon_{\perp}$  будет определяться соотношением

$$f(\varepsilon_{\perp}) = \frac{2\pi\rho_0(\varepsilon_{\perp})}{S} \frac{d\rho_0}{d\varepsilon_{\perp}}, \quad (62.14)$$

где  $\rho_0$  — точка влета позитрона в кристалл, связанная в рассматриваемом случае с  $\varepsilon_{\perp}$  соотношением  $\varepsilon_{\perp} = U_r(\rho_0)$ ,  $S$  — площадь элементарной ячейки в плоскости, ортогональной оси  $z$ . С этой функцией распределения спектральная плотность излучения в области больших частот будет иметь вид

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}^+}{d\omega} \right\rangle_L = L \frac{2e^2 n}{3m^2} \left( 1 + \frac{E'^2}{E^2} + \frac{\omega^2}{2E^2} \right) \frac{\pi E^2}{S} \int_0^{\infty} \rho_0^3 d\rho_0 A(\rho_0). \quad (62.15)$$

Основной вклад во входящий сюда интеграл по  $\rho_0$  дают значения  $\rho_0$  порядка радиуса экранирования потенциала атома:  $\rho_0 \sim R$ . Используя эту оценку, теперь легко показать, что спектральная плотность излучения (62.15) по порядку величины в  $\pi R^2/S$  раз меньше спектральной плотности излучения надбарьерных электронов (62.13). В частности, при прохождении частиц через кристалл кремния вдоль оси  $\langle 100 \rangle$  имеем  $\pi R^2/S \approx 1/30$ .



ТОРМОЖЕНИЕ БЫСТРЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ  
В ВЕЩЕСТВЕ

§ 63. Ионизационные потери энергии  
заряженной частицей в веществе

Быстрая заряженная частица при движении в веществе теряет свою энергию на возбуждение электронных оболочек и ионизацию атомов среды, а также на излучение фотонов. Начнем с рассмотрения ионизационных потерь энергии (включая потери энергии как на возбуждение электронных оболочек атомов, так и на ионизацию атомов). Общие ионизационные потери энергии тяжелой заряженной частицей на единице пути определяются следующей формулой:

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{2\pi n_e Z^2 e^4}{mv^2} \left[ \ln \frac{2mv^2 W_{\max}}{I^2(1-\beta^2)} - 2\beta^2 - \Delta_F \right], \quad (63.1)$$

где  $Ze$  — заряд частицы,  $n_e$  — число электронов в единице объема,  $v$  — скорость частицы,  $\beta = v/c$ ,  $I$  — средний потенциал ионизации атомов в среде,  $W_{\max}$  — максимальная энергия, передаваемая движущейся частицей атомным электронам, и  $\Delta_F$  — поправка на эффект плотности, связанный с поляризацией среды.

Эта формула (без учета поправки на эффект плотности) основана на квантовомеханическом рассмотрении задачи. Она была получена Бете [1] и Блохом [2], которые в идейном плане исходили из классической формулы Бора [3] для потерь энергии частицей в веществе. Поправка на эффект плотности была найдена Ферми [4]. О ней будет идти речь в следующем параграфе. Здесь же мы приведем только приближенный вывод формулы (63.1), принадлежащий Ферми [5].

Рассмотрим электрон, находящийся на расстоянии  $b$  от траектории заряженной частицы, обладающей массой  $M$ , зарядом  $Ze$  и движущейся со скоростью  $v$ . Предположим, что скорость частицы велика по сравнению со скоростью атомного электрона. Тогда последний перед столкновением можно считать покоящимся и, кроме того, можно пренебречь смещением электрона, возникающим в результате действия на него поля движущейся частицы. Для того чтобы определить энергию, которую приобретает электрон в результате столкновения, вычислим импульс, сообщаемый электрону пада-

ющей частицей. Эта величина, согласно (1.1), определяется соотношением

$$\Delta \mathbf{p} = e \int_{-\infty}^{+\infty} dt \mathbf{E}(\mathbf{r}(t)), \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi, \quad (63.2)$$

где  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  — электрическое поле частицы в точке нахождения электрона. Подставляя сюда выражение (2.5) для потенциала движущейся частицы, находим, что параллельная составляющая переданного импульса равна нулю, а поперечная составляющая

$$\Delta \mathbf{p}_{\perp} = \frac{2Ze^2}{vb}, \quad (63.3)$$

где  $b$  — прицельный параметр (минимальное расстояние между частицей и электроном). При этом энергия, переданная заряженной частицей электрону, будет равна

$$\Delta E = \frac{(\Delta p_{\perp})^2}{2m} = \frac{2Z^2 e^4}{mv^2 b^2}. \quad (63.4)$$

Умножив это выражение на величину  $2\pi n_e b db$ , представляющую собой число электронов, имеющих прицельные параметры  $b$  в интервале от  $b$  до  $b+db$  на 1 см пути ( $n_e$  — плотность электронов среды), и проинтегрировав полученное выражение по прицельным параметрам, получим потери энергии частицей на единице длины:

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{4\pi n_e Z^2 e^4}{mv^2} \int \frac{db}{b}. \quad (63.5)$$

Входящий в (63.5) интеграл по  $b$  расходится на нижнем и верхнем пределах интегрирования, поэтому область интегрирования по  $b$  должна быть ограничена значениями  $b_{\min}$  и  $b_{\max}$ , определяемыми из условий применимости формулы (63.5). При этом зависимость потерь энергии от значений прицельных параметров  $b_{\min}$  и  $b_{\max}$  будет логарифмической:

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{4\pi n_e Z^2 e^4}{mv^2} \ln \frac{b_{\max}}{b_{\min}}. \quad (63.6)$$

Верхний предел значений  $b$  определяется из следующего условия. Если время столкновения превышает период обращения  $T_e$  атомного электрона на соответствующей боровской орбите, то налетающая частица не может передать электрону заметную долю своей энергии. Время столкновения, согласно (63.2), по порядку величины равно  $\tau \sim \frac{b}{v} \sqrt{1-\beta^2}$ , следовательно, величина  $b_{\max}$  определяется таким образом, чтобы условие

$$T_e > \tau \sim \frac{b}{v} \sqrt{1-\beta^2}$$

выполнялось на всем интервале интегрирования по  $b$ . Частота колебания электронов в атомах среды по порядку величины равна  $I/\hbar$ , где  $I$ —среднее значение ионизационного потенциала атомов среды, поэтому для  $b_{\max}$  получим

$$b_{\max} \sim \frac{\hbar}{I} \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (63.7)$$

Действительно, покажем, что если частота  $\Omega$  колебаний электрона в атоме велика по сравнению с величиной  $\tau^{-1}$ , то энергия, передаваемая электрону, пренебрежимо мала.

Рассмотрим с этой целью компоненту смещения электрона, ортогональную траектории падающей частицы. Если координата электрона есть  $y$ , а амплитуда его колебания равна  $d$ , то при  $d \ll y$

$$y(t) = b + d \sin \Omega t.$$

При этом изменение энергии электрона при его взаимодействии с частицей будет определяться соотношением

$$\Delta E = \int dt \dot{y} E_y,$$

где  $E_y$ —составляющая электрического поля частицы вдоль оси  $y$ . Подставляя сюда выражение для  $y(t)$ , находим, что

$$\Delta E = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{Ze^2 \Omega d \cos \Omega t \cos \theta}{y^2 + v^2 t^2},$$

где  $\theta$ —угол, определяющий проекцию вектора  $E$  на ось  $y$ . Так как  $\cos \theta < 1$ , то

$$\Delta E \lesssim Ze^2 \Omega d \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\cos \Omega t}{y^2 + v^2 t^2} = \frac{Ze^2 \Omega \pi d}{vb} e^{-\Omega \tau},$$

и, следовательно, при  $\Omega \tau > 1$  величина  $\Delta E$  экспоненциально мала.

Для того чтобы определить нижний предел интегрирования в (63.5), перейдем в систему покоя налетающей частицы. Так как скорость атомарного электрона предполагается малой по сравнению со скоростью частицы, то в этой системе отсчета скорость электрона будет равна  $v$ . Учитывая, что использованный выше классический подход справедлив, если де-бройлевская длина волны электрона  $\lambda \sim (\hbar/mv) \sqrt{1-\beta^2}$  мала по сравнению с прицельным параметром, находим, что

$$b_{\min} \sim \lambda \sim \frac{\hbar}{mv} \sqrt{1-\beta^2}. \quad (63.8)$$

Подставляя найденные выражения для  $b_{\min}$  и  $b_{\max}$  в (61.6), приходим к следующей формуле для потерь энергии:

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{4\pi n_e Z^2 e^4}{mv^2} \ln \frac{mv^2}{I(1-\beta^2)}. \quad (63.9)$$

Эта формула, как мы видим, с логарифмической точностью совпадает с формулой Бете и Блоха.

Приведенные выше формулы применимы к любым быстрым заряженным частицам—протонам, мезонам, ионам и т. д. В случае электронов эти формулы должны быть несколько видоизменены. Связано это с тем, что характер столкновений быстрых электронов и тяжелых частиц с электронами среды слегка различается. Кроме того, при столкновении идентичных частиц необходимо принимать во внимание обменные эффекты. С учетом этих эффектов потери энергии быстрых электронов в среде определяются формулой [6,7]

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{2\pi e^4 n_e}{mv^2} \left\{ \ln \frac{mv^2 E_x}{2I^2(1-\beta^2)} - (2\sqrt{1-\beta^2} - 1 + \beta^2) \ln 2 + 1 - \beta^2 + \frac{1}{8}(1 - \sqrt{1-\beta^2})^2 - \Delta_F \right\}, \quad (63.10)$$

где  $E_x$ —релятивистская кинетическая энергия электрона. Для ультрарелятивистских электронов эта формула может быть записана в виде

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{2\pi e^4 n_e}{mv^2} \left\{ \ln \frac{2mv^2 E_x}{I^2(1-\beta^2)} - 2\beta^2 + \eta - \Delta_F \right\}. \quad (63.11)$$

Входящая сюда поправка  $\eta = 17/8 - 2 \ln 2$  определяет отличие формулы (63.1) от формулы (63.11). Учет  $\eta$  в формуле для  $dE/dx$  относительно немного (в пределах 10%) меняет значение ионизационных потерь энергии быстрых электронов в среде.

#### § 64. Эффект плотности Ферми и черенковские потери энергии

Рассматривая ионизационные потери энергии, мы видели, что они определяются полем, создаваемым движущейся заряженной частицей в месте нахождения атомного электрона. При этом считалось, что есть только пролетающая частица и один атомный электрон. Между тем электрон, которому передается энергия, находится в среде, поляризуемой движущейся частицей. Поэтому поле в месте нахождения электрона ослабляется и он получает меньшую энергию, чем если бы он был изолированным. Таким образом, поляризация среды должна приводить к уменьшению ионизационных потерь энергии. Для того чтобы дать количественную теорию этого эффекта, рассмотрим вначале окружающее движущуюся

заряженную частицу электромагнитное поле в среде с плотностью электронов, равной  $n_e$ .

Если заряженная частица движется в среде, то, как показано в § 3, среда оказывает влияние на окружающую частицу поле. Поляризационные свойства среды описываются оператором диэлектрической проницаемости  $\hat{\epsilon}$ . Если не учитывать пространственной дисперсии среды (это означает, что  $k \ll \omega/\bar{v}$ , где  $\bar{v}$ —средняя скорость частиц среды), то в компонентах Фурье уравнения Максвелла для векторного и скалярного потенциалов электромагнитного поля частицы приобретают вид

$$\begin{aligned} \Delta A_\omega - \omega^2 \epsilon(\omega) A_\omega &= -4\pi \mathbf{j}_\omega, \\ \Delta \varphi_\omega - \omega^2 \epsilon(\omega) \varphi_\omega &= -4\pi \rho_\omega, \end{aligned} \quad (64.1)$$

где  $\epsilon(\omega)$ —диэлектрическая проницаемость среды на частоте  $\omega$  (мы здесь, как и в § 3, не рассматриваем тензорных свойств диэлектрической проницаемости),  $\mathbf{j}_\omega$  и  $\rho_\omega$ —фурье-компоненты плотности тока и заряда частицы, движущейся по траектории  $\mathbf{r}(t)$ :

$$\{\mathbf{j}_\omega; \rho_\omega\} = e \int dt e^{i\omega t} \{\mathbf{v}(t); 1\} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)).$$

Переходя в (64.1) к фурье-компонентам полей  $A_\omega$  и  $\varphi_\omega$  по пространственным координатам

$$\begin{aligned} A_\omega &= (2\pi)^{-3} \int d^3 k e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} A(\mathbf{k}, \omega), \\ \varphi_\omega &= (2\pi)^{-3} \int d^3 k e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \varphi(\mathbf{k}, \omega), \end{aligned} \quad (64.2)$$

легко показать, что величины  $A(\mathbf{k}, \omega)$  и  $\varphi(\mathbf{k}, \omega)$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{1}{4\pi^3} \frac{1}{k^2 - \omega^2 \epsilon(\omega)} \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega), \\ \varphi(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{1}{4\pi^3} \frac{1}{k^2 - \omega^2 \epsilon(\omega)} \rho(\mathbf{k}, \omega), \end{aligned} \quad (64.3)$$

где

$$\{\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega); \rho(\mathbf{k}, \omega)\} = e \int dt \{\mathbf{v}(t); 1\} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}(t))}.$$

При выводе этих соотношений мы не использовали конкретный вид функции  $\epsilon(\omega)$ , так что формулы (64.3) справедливы как в случае  $v^2 \epsilon > 1$ , так и в случае  $v^2 \epsilon < 1$ . В первом из этих случаев имеет место черенковское излучение частицы (см. § 3).

При движении частицы в свободном электронном газе с плотностью  $n_e$ , как известно [8, 9], диэлектрическая проницаемость среды определяется соотношением

$$\epsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2 / \omega^2 + i\eta, \quad (64.4)$$

где  $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_e m^{-2}}$ —плазменная частота,  $\eta$ —малая добавка к диэлектрической проницаемости, учитывающая поглощение (эффект поглощения в дальнейшем мы рассматривать не

будем). Черенковское излучение в данном случае отсутствует. Это, однако, не означает, что среда не оказывает влияния на окружающее частицу электромагнитное поле. Действительно, подставляя (64.4) в (64.3), находим, что в случае прямолинейного движения скалярный потенциал электромагнитного поля частицы определяется формулой

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{\sqrt{\left(\frac{z-t}{v}\right)^2 + \gamma^{-2} \rho^2}} \exp \left[ -\frac{\omega_p}{v} \sqrt{\rho^2 + \gamma^2 \left(\frac{z-t}{v}\right)^2} \right], \quad (64.5)$$

где  $z$  и  $\rho$  — координаты, параллельная и ортогональные вектору скорости движущейся частицы  $\mathbf{v}$ .

Мы видим, что учет поляризации среды (зависимости (64.4) диэлектрической проницаемости от частоты) приводит к экранированию окружающего частицу поля на больших расстояниях от нее. А именно, экспоненциальное уменьшение поля происходит на расстояниях  $\rho \sim v/\omega_p$  от частицы в поперечном направлении.

Ясно, что указанный эффект должен отразиться на ионизационных потерях энергии заряженной частицы. Действительно, приведенная в предыдущем параграфе оценочная формула для потерь энергии определяется максимальным значением прицельного параметра  $b_{\max}$ , при котором частица еще эффективно передает энергию электронам среды. Найденное в § 63 значение для этой величины без учета поляризационных свойств среды линейно растет с энергией частицы (см. формулу (63.7)). Формула (64.5), однако, показывает, что поле частицы в среде на расстояниях, превосходящих  $v/\omega_p$ , экспоненциально уменьшается, и, следовательно, при  $b > v/\omega_p$ , в отличие от результатов § 63, энергия, передаваемая частицей электрону среды, будет экспоненциально малой. Таким образом, при высоких энергиях входящая в (63.6) величина  $b_{\max}$  должна быть по порядку величины равной

$$b_{\max} \sim \min \left( \frac{v\gamma}{I}, \frac{v}{\omega_p} \right). \quad (64.6)$$

Заметим, что радиус экранирования потенциала частицы в среде  $v/\omega_p$  при высоких энергиях практически не зависит от энергии частицы, поэтому при  $E > mIv/\omega_p$  учет поляризации среды приводит к уменьшению ионизационных потерь энергии по сравнению со случаем, когда данный эффект не учитывается. Этот эффект впервые был теоретически обнаружен и исследован Ферми [4] и носит его имя.

Приведем теперь количественные формулы, определяющие ионизационные потери энергии быстрых частиц в среде. Воспользуемся с этой целью формулой

$$\frac{dE}{dt} = e \mathbf{v}(t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)}, \quad (64.7)$$

определяющей потери энергии частиц в веществе в единицу времени. Здесь  $v(t)$ —скорость частицы в момент времени  $t$  и  $E(\mathbf{r}, t)$ —напряженность электрического поля, создаваемого самой частицей в точке ее нахождения. Формула (64.7) показывает, что потери энергии частицей в среде представляют собой работу сил торможения, действующих на частицу со стороны электромагнитного поля, создаваемого самой частицей.

Подставляя в (64.7) соотношения (64.3) для фурье-компонент потенциала, легко показать, что полные потери энергии могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \Delta E &= e \int dt v E(\mathbf{r}(t), t) = \\ &= \frac{i}{4\pi^3} \int d\omega d^3 k \left\{ \frac{1}{\omega \varepsilon(\omega)} |j_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega)|^2 + \frac{\omega}{\omega^2 \varepsilon(\omega) - k^2} |j_{\perp}(\mathbf{k}, \omega)|^2 \right\}, \end{aligned} \quad (64.8)$$

где  $j_{\parallel}$  и  $j_{\perp}$ —продольная и поперечная вектору  $\mathbf{k}$  компоненты Фурье тока частицы.

Первое слагаемое в этом выражении соответствует поляризационным потерям энергии частицы в среде, а второе слагаемое соответствует потерям энергии, связанным с излучением поперечных волн (черенковское, тормозное излучение). Тормозные потери энергии на излучение мы рассмотрим в § 70. Здесь же остановимся на рассмотрении потерь энергии, связанных с поляризационными свойствами среды. Для простоты будем считать далее, что траектория частицы в среде является прямолинейной. Тогда фурье-компоненты тока частицы будут определяться соотношением

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi e v \delta(\omega - \mathbf{k}v). \quad (64.9)$$

Подставляя это соотношение в (64.8) и учитывая, что

$$(\delta(\omega - \mathbf{k}v))^2 = 2\pi \tau \delta(\omega - \mathbf{k}v),$$

находим, что при прямолинейном движении потери энергии частицей в единицу времени равны

$$\frac{dE}{dx} = \frac{e^2}{2\pi^2 v} \operatorname{Im} \int d^3 k \left[ \frac{\omega}{k^2 \varepsilon(\omega)} + \frac{v^2 - \omega^2/k^2}{\omega^2 (\varepsilon(\omega) - k^2/\omega^2)} \right], \quad \omega = \mathbf{k}v. \quad (64.10)$$

При выводе (64.10) мы воспользовались также тем, что вещественная часть  $\varepsilon(\omega)$  является четной функцией частоты, а мнимая—нечетной функцией частоты [8, 9]. В дальнейшем будем предполагать, что поглощение волн в среде мало, т. е. что мнимая часть  $\varepsilon(\omega)$  мала.

Второе слагаемое в формуле (64.10) отлично от нуля только при  $v^2 \varepsilon(\omega) > 1$ . Подынтегральное выражение в этом случае имеет полюса при значениях  $k_{\perp} = \pm k_{\parallel} \sqrt{v^2 \varepsilon(\omega) - 1}$ . Используя теорему о вычетах, находим, что при  $v^2 \varepsilon > 1$  второе

слагаемое в (64.10) приводит к известной формуле (3.14) для черенковских потерь энергии частицей в среде на излучение:

$$\frac{dE}{dt} = e^2 v \int d\omega \omega \left( 1 - \frac{1}{v^2 \varepsilon(\omega)} \right). \quad (64.11)$$

Интегрирование здесь ведется по области  $\omega$ , в которой  $v^2 \varepsilon > 1$ .

Мы видим, что черенковские потери энергии являются частью полных потерь энергии частицей в среде.

Рассмотрим теперь первое слагаемое в (64.10), определяющее собственно ионизационные потери энергии. Для определенности будем предполагать, что  $\varepsilon(\omega)$  определяется формулой (64.4).

Подставляя соотношение (64.4) в (64.10), приходим к следующему выражению для потерь энергии:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{e^2}{2\pi^2} \text{Im} \int k_{\perp} dk_{\perp} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\omega}{\left( k_{\perp}^2 + \frac{\omega^2}{v^2} \right) (\omega^2 - \omega_p^2 + 2i\eta)}. \quad (64.12)$$

Второе слагаемое в (64.10) в этом случае обращается в нуль, так как для изотропной плазмы фазовые скорости поперечных волн больше скорости света и, следовательно, условие черенковского излучения не выполняется.

Интеграл по  $\omega$  в (64.12) вдоль вещественной оси равен вычету относительно полюса  $\omega = ivk_{\perp}$  в верхней полуплоскости комплексной переменной  $\omega$ , поэтому

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{e^2 \omega_p^2}{v} \int_0^{k_0} \frac{k_{\perp} dk_{\perp}}{k_{\perp}^2 + \omega_p^2/\omega^2}. \quad (64.13)$$

Мы видим, что на верхнем пределе интеграл по  $k_{\perp}$  расходится, поэтому этот интеграл должен быть ограничен некоторым максимальным значением  $k_{\text{max}} = k_0$ , определяемым из условия применимости использованного нами макроскопического рассмотрения взаимодействия частицы со средой. Последнее еще справедливо, если  $R^{-1} \gtrsim k_0 \gg \omega_p/v$ , где  $R$  — порядок величины размеров атома в среде. При таких значениях  $k_0$  формула (64.13) приобретает вид

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2\pi e^4 n_e}{mv} \ln \left( \frac{k_0 v}{\omega_p} \right)^2. \quad (64.14)$$

В результате мы получили формулу для ионизационных потерь энергии, для которых  $k_{\perp} \leq k_0$ . Это условие физически означает, что мы учитываем только далекие столкновения, так как большим  $k_{\perp}$  ( $k_{\perp} > k_0$ ), при которых формула (64.14) неверна, соответствуют малые значения параметра столкновения, т. е. близкие столкновения. По этой причине близкие



столкновения должны учитываться отдельно и вклад от них в ионизационные потери должен быть добавлен к формуле (64.14). Мы рассмотрим потери энергии, связанные с близкими столкновениями, в следующем параграфе. Здесь же приведем лишь формулу для потерь энергии, обусловленных близкими столкновениями для тяжелой заряженной частицы (см. § 65):

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2\pi e^4 n_e}{mv} \left( \ln \frac{2m W_{\max}}{(\hbar k_0)^2} - v^2 + \frac{W_{\max}^2}{4E^2} \right), \quad (64.15)$$

где  $W_{\max}$  — максимальное значение энергии, передаваемое частицей электрону среды. При больших энергиях падающей частицы величина  $W_{\max}$  определяется формулой

$$W_{\max} = \frac{E^2 - M^2}{M \left( \frac{M}{2m} + \frac{m}{2M} + \frac{E}{M} \right)}. \quad (64.16)$$

Здесь  $m$  — масса электрона среды и  $M$  — масса движущейся частицы.

Складывая формулы (64.14) и (64.15), находим окончательно выражение для полных ионизационных потерь энергии:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2\pi e^4 n_e}{mv} \left( \ln \frac{m^2 v^2 W_{\max}}{2\pi \hbar^2 e^2 n_e} - v^2 + \frac{W_{\max}^2}{4E^2} \right). \quad (64.17)$$

Обратим внимание на то, что величина  $k_0$  не входит в конечный результат. Физическая причина этого заключается в том, что области применимости формул (64.14) и (64.15) в действительности перекрываются, а величина  $k_0$  входит в эти формулы под знаком логарифма.

При  $W_{\max} \ll E$  формула (64.17) совпадает с соответствующим результатом Ферми [4], полученным на основе вычисления потока энергии электромагнитного поля, проходящего через цилиндрическую поверхность малого радиуса, окружающую траекторию частицы в среде\*.

Формула (64.17) показывает, что логарифмический фактор выражения в квадратных скобках зависит от плотности электронов в среде, причем с ростом  $n_e$  этот фактор уменьшается, что приводит, в свою очередь, к уменьшению ионизационных потерь энергии по сравнению с теорией Бора — Бете — Блоха. В этом и заключается эффект плотности Ферми.

Мы получили формулу для потерь энергии, считая, что среда представляет собой газ свободных электронов. Ферми

\*) Заметим, что интенсивность черенковского излучения вычислялась Таммом и Франком [10] тоже как поток электромагнитной энергии через цилиндрическую поверхность, окружающую траекторию частицы, но при этом предполагалось, что радиус цилиндра очень велик. Так как результат Ферми справедлив и при малых значениях радиуса цилиндра  $b$ , а черенковское излучение соответствует  $b \rightarrow \infty$ , то потери на черенковское излучение содержатся в формулах Ферми.

нашел эту формулу исходя из представления об атомных электронах как о некоторых осцилляторах. Диэлектрическая проницаемость среды в этой модели определяется соотношением

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi n_e}{m} (\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma_0 \omega)^{-1}, \quad (64.18)$$

где  $\omega_0$  — частота и  $\gamma_0$  — коэффициент затухания осциллятора. Ландау [8] показал, что в действительности формула (64.17) при высоких энергиях ( $E \gg mIv/\omega_p$ ) имеет универсальный характер (см. также [11]). Связано это с тем, что при больших энергиях  $E$  основной вклад в интеграл по  $\omega$  в (64.10) вносят большие значения частот  $|\omega| \gg \omega_p$ . В этой области частот диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon(\omega)$  имеет асимптотику (64.4), и, следовательно, при вычислении ионизационных потерь энергии конкретная структура выражения для  $\varepsilon(\omega)$  в области малых частот несущественна. Если же  $E \ll mIv/\omega_p$ , то эффект плотности уже не играет роли и потери энергии определяются формулой Бете и Блоха (63.1).

Рассмотрим теперь зависимость потерь энергии быстрых частиц в веществе от их энергии. При выполнении условия  $E \ll \ll mIv/\omega_p$ , как отмечалось выше, ионизационные потери энергии определяются формулой Бете — Блоха (63.1). Поляризация среды в этом случае не оказывает влияния на ионизационные потери энергии частицы.

Если же  $E \gg mIv/\omega_p$ , то часть релятивистского возрастания потерь энергии, обусловленных увеличением размеров области электромагнитного поля частицы, полностью компенсируется эффектом плотности. При этом зависимость потерь энергии от энергии частицы определяется величиной  $W_{\max}$ . Сравнивая формулу (63.1) с формулой (64.17), мы видим, что поправка на эффект плотности имеет вид

$$\Delta_F = -\ln \frac{I^2}{\gamma^2 \hbar^2 \omega_p^2} - 1.$$

Из формулы (64.16) для  $W_{\max}$ , в частности, вытекает, что при  $E \gg M^2/2m$  величина  $W_{\max} \approx E$ . Таким образом, в рассматриваемой области энергий от логарифмического члена в формуле (64.17) остается  $\ln \gamma$ , тогда как, согласно формуле Бете и Блоха (63.1), зависимость логарифмического фактора от энергии определяется величиной  $\ln(\gamma^3)$ . Следовательно, благодаря эффекту плотности, релятивистское увеличение потерь энергии быстрых частиц в веществе оказывается в три раза меньшим релятивистского увеличения этой величины в случае, когда эффект плотности не учитывается.

Отметим в заключение, что формула (63.1) относится к случаю, когда частица движется в среде достаточно долго, так что среда экранирует поле частицы на далеких расстояниях

от нее. При входе же частицы в среду экранировка поля частицы наступает не сразу. Перестройка поля частицы происходит только через промежуток времени, по порядку величины равный  $\tau \sim 2\gamma^2/\omega^*$ . Подставляя сюда значение  $\omega \sim \gamma\omega_p$ , находим, что экранирование поля частицы происходит только через интервал времени  $\tau \sim 2\gamma/\omega_p$ , прошедшего после входа частицы в среду. Если при этом толщина мишени будет меньше длины перестройки поля, то эффект плотности не будет сказываться на потерях энергии и последние будут определяться формулой (63.9).

## § 65. Учет близких столкновений

В предыдущих параграфах было показано, что ионизационные потери энергии быстрой заряженной частицы складываются из потерь, обусловленных далекими и близкими столкновениями. Под далекими понимаются столкновения, при которых во взаимодействие с пролетающей частицей вовлекается большое число частиц среды. Влияние этого обстоятельства на потерю энергии частицей является с макроскопической точки зрения результатом диэлектрической поляризации среды ее зарядом. Под близкими понимаются столкновения, при которых взаимодействие частицы с различными электронами среды можно рассматривать как взаимодействия с отдельно взятыми частицами. Области применимости обоих подходов перекрываются, поэтому при нахождении полных потерь энергии частицей граничный импульс, разделяющий обе области, из конечного результата выпадает (см. формулы (64.14), (64.15) и (64.17)).

Разделение столкновений на далекие и близкие оказывается принципиальным, поскольку потери энергии, связанные с этими столкновениями, существенно изменяются в ряде специальных случаев. В частности, такие изменения имеют место при прохождении кластеров (систем частиц) через вещество, а также заряженных частиц — через монокристаллы (см. § 67 и § 68). Потери энергии, обусловленные далекими столкновениями, были подробно рассмотрены в предыдущем параграфе. Здесь же мы получим формулы, определяющие потери энергии быстрых частиц в среде, связанные с близкими столкновениями.

Рассмотрим вначале соотношения, вытекающие из законов сохранения энергии и импульса при столкновении частицы с отдельным электроном среды. Последний в интересующем

---

<sup>\*</sup> При пересечении частицей границы раздела двух сред вследствие перестройки поля частицы происходит излучение (оно носит название переходного излучения). На этот эффект было обращено внимание Гинзбургом и Франком [12].

нас случае до столкновения можно считать свободным и покоящимся. Тогда энергии и импульсы сталкивающихся частиц будут связаны друг с другом соотношениями

$$E + m = E' + E_-, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}_-, \quad (65.1)$$

где  $E$ ,  $\mathbf{p}$  и  $E'$ ,  $\mathbf{p}'$  — энергия и импульс падающей частицы соответственно до и после рассеяния (массу этой частицы обозначим  $M$ ), а  $E_-$  и  $\mathbf{p}_-$  — энергия и импульс электрона среды после столкновения ( $m$  — масса электрона).

Из этих соотношений вытекает, что энергия электрона после столкновения связана с углом  $\vartheta_-$  между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}_-$  — соотношением

$$E_- = m \frac{(E + m)^2 + (E^2 - M^2) \cos^2 \vartheta_-}{(E + m)^2 - (E^2 - M^2) \cos^2 \vartheta_-}.$$

Отсюда находим, что максимальная величина переданной электрону энергии ( $W_{\max} = E_{\max} - m$ ) определяется соотношением (64.16).

Получим теперь формулы для потерь энергии быстрой частицы в среде, связанных с близкими столкновениями. Предварительно заметим, что при высоких энергиях взаимодействие падающей частицы с электроном среды может быть описано в рамках квантовомеханической теории возмущений. При этом если падающая частица не является электроном, то ее взаимодействие с электроном среды описывается диаграммой рис. 9.1.

В частности, если падающая частица является мюоном, то сечение процесса, соответствующее этой диаграмме, определяется формулой

$$d\sigma = \frac{2\pi e^4}{m^2 v^2} \frac{d\Delta}{\Delta^2} \left( 1 - v^2 \frac{\Delta}{\Delta_{\max}} + \frac{m^2}{2E^2} \Delta^2 \right), \quad (65.2)$$

где  $v$  — скорость мюона,  $E$  — его энергия,  $\Delta = (E_- - m)/m$  — энергия (в единицах  $m$ ), переданная налетающей частицей электрону среды.

Формула (65.2) определяет в лабораторной системе распределение по энергиям вторичных электронов (эти электроны иногда называют  $\delta$ -электронами), возникающих при рассеянии быстрых мюонов. При малых значениях  $\Delta$  эта формула приобретает вид

$$d\sigma = \frac{2\pi e^4}{m^2 v^2} \frac{d\Delta}{\Delta^2}, \quad \Delta \ll \frac{E_-}{m} - 1. \quad (65.3)$$

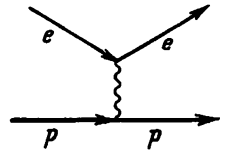


Рис. 9.1. Диаграмма, описывающая взаимодействие протона  $p$  с электроном  $e$  среды в первом порядке теории возмущений

Домножив сечение (65.2) на плотность электронов в среде  $n_e$  и на  $\Delta$ , получим формулу для торможения частицы на единице пути с передачей энергии в интервале между  $\Delta$  и  $\Delta + d\Delta$ . В результате интегрирования полученного выражения по  $\Delta$  в интервале от  $\Delta_0$  до  $\Delta_{\max}$  ( $\Delta_0 \ll \Delta_{\max}$ ) приходим к следующей формуле для потерь энергии на единице пути, связанных с близкими соударениями,

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\Delta > \Delta_0} = -n_e \int_{\Delta_0}^{\Delta_{\max}} \Delta d\sigma(\Delta) = -\frac{2\pi e^4 n_e}{m^2 v^2} \left( \ln \frac{\Delta_{\max}}{\Delta_0} - v^2 + \frac{1}{2} \frac{m^2}{E^2} \Delta_{\max}^2 \right). \quad (65.4)$$

Формула (65.4) справедлива, если минимальное значение энергии, переданной электрону среды, велико по сравнению с энергией связи электрона с атомом ( $\Delta_0 \gg I/m$ ). При этом величина  $\Delta_0$  может быть выбрана так, чтобы выполнялось неравенство  $\Delta_0 \ll 1$ . Тогда величина  $\Delta_0$  может быть связана с введенной в предыдущем параграфе величиной  $k_0$  соотношением  $\Delta_0 = (\hbar k_0)^2 / 2m^2$ , и мы приходим к формуле (64.15) для потерь энергии, при которых электрону среды передаются импульсы большие, чем  $\hbar k_0$ .

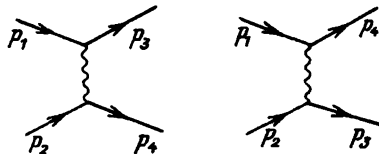


Рис. 9.2. Диаграммы Фейнмана, описывающие столкновение электрона с электроном среды в первом порядке теории возмущений

Рассмотрим теперь столкновение быстрого электрона с электроном среды. Данный процесс, в отличие от рассмотренного выше, описывается двумя диаграммами Фейнмана, учитывающими одинаковость сталкивающихся частиц (рис. 9.2). Сечение

рассеяния, соответствующее этим диаграммам, в лабораторной системе отсчета имеет вид [13]

$$d\sigma = \frac{2\pi e^4}{m^2} \frac{d\Delta}{\gamma^2 - 1} \left\{ \frac{(\gamma - 1)^2 \gamma^2}{\Delta^2 (\gamma - 1 - \Delta)^2} - \frac{2\gamma^2 + 2\gamma - 1}{\Delta(\gamma - 1 - \Delta)} + 1 \right\}, \quad (65.5)$$

где  $\gamma = E_-/m$ , а  $m\Delta$  и  $(\gamma - 1 - \Delta)m$  — кинетические энергии двух электронов после столкновения; тождественность обеих частиц проявляется в симметрии формулы по отношению к этим величинам. Если условиться называть электроном отдачи тот из них, который имеет меньшую энергию, то  $\Delta$  будет пробегать значения от  $\Delta_0$  до  $\Delta_{\max} = (\gamma - 1)/2$ .

Домножив сечение (65.5) на  $n_e$  и на  $\Delta$  и проинтегрировав полученное выражение по  $\Delta$  от  $\Delta_0$  до  $\Delta_{\max} = (\gamma - 1)/2$ , получим при  $\gamma \gg 1$  следующее выражение для потерь энергии:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2\pi e^4 n_e}{m^2 v} \left( \ln \frac{\gamma}{4\Delta_0} + \frac{9}{8} \right). \quad (65.6)$$

Эта формула отличается от формулы (65.4) для потерь энергии тяжелой частицы, связанных с близкими соударениями. В крайне релятивистском случае выражения в скобках в формулах (65.4) и (65.6) различаются слагаемым  $(13/8 - \ln 4)$ . Учет этого слагаемого относительно немного (в пределах 10%) меняет значение потерь энергии быстрых электронов в среде.

Используя формулы (64.14) и (64.16), находим, что полные потери энергии электронов в среде при  $E \gg mIv/\omega_p$  определяются формулой

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2\pi e^4 n_e}{m^2 v} \left( \ln \frac{m^2 v^2 \gamma}{2 \hbar^2 \omega_p^2} + \frac{9}{8} \right). \quad (65.7)$$

Если же  $E \ll mIv/\omega_p$ , то полные ионизационные потери энергии электроном в среде определяются формулой (63.11).

### § 66. Флюктуации ионизационных потерь энергии быстрых частиц в веществе

Потери энергии заряженной частицы в веществе представляют собой статистический процесс, поскольку различные столкновения, отвечающие за этот процесс, являются независимыми событиями. Поэтому при данной толщине слоя эти потери непостоянны, причем вероятность заметных флюктуаций оказывается значительной. По этой причине формула (63.1), в действительности, определяет только среднее значение потерь энергии на единице длины, и возникает вопрос об учете флюктуаций в потере энергии при прохождении частицы через вещество. Чтобы учесть флюктуации, введем в рассмотрение функцию распределения по энергиям для быстрых частиц, прошедших через слой вещества заданной толщины и потерявших часть своей энергии в результате столкновений с электронами среды. Слой вещества мы будем считать не очень толстым, так чтобы полные средние потери энергии были малы по сравнению с начальной энергией  $E_0$ .

Обозначим посредством  $f(x, \Delta)$  функцию распределения частиц по энергиям на глубине  $x$  проникновения частиц в среду. Она представляет собой вероятность того, что частица с заданной начальной энергией, проходя через слой толщины  $x$ , потеряет долю своей энергии, заключенную в интервале между  $\Delta$  и  $\Delta + d\Delta$ . Функция  $f$  нормирована условием  $\int d\Delta f(x, \Delta) = 1$ . Получим кинетическое уравнение, определяющее эту функцию.

Пусть  $w(E, \varepsilon)$  — отнесенная к единице пути вероятность потери энергии  $\varepsilon$  частицей с энергией  $E$ . Поскольку ионизационные потери энергии считаются малыми по сравнению с  $E_0$ , то вместо  $E$  в  $w(E, \varepsilon)$  можно написать  $E_0$ . При этом мы будем записывать  $w(E_0, \varepsilon)$  как  $w(\varepsilon)$ . Приравняв изменение функции распределения  $dx (df/dx)$  на длине  $dx$  разности между

числом частиц, приобретающих заданную энергию  $E$  в результате потерь на ионизацию на пути  $dx$ , и числом частиц, покидающих данный интервал энергий, приходим к следующему уравнению для функции распределения:

$$\frac{df(x, \Delta)}{dx} = \int_0^{E_0} d\varepsilon w(\varepsilon) [f(x, \Delta - \varepsilon) - f(x, \Delta)]. \quad (66.1)$$

В качестве верхнего предела интегрирования здесь можно подставить  $\varepsilon = \infty$ , так как  $f(x, \Delta) = 0$  при  $\Delta < 0$  и  $w(\varepsilon) = 0$  при  $\varepsilon > E_0$ .

Уравнение (66.1) впервые было получено и применено для анализа флуктуаций ионизационных потерь энергии быстрых частиц в веществе Ландау [14].

Уравнение (66.1) не содержит независимых переменных  $x$  и  $\Delta$  явно. Это позволяет искать решение при помощи преобразования Лапласа. Проведя это преобразование по независимой переменной  $\Delta$ , запишем

$$\varphi(p, x) = \int_0^{\infty} d\Delta f(\Delta) e^{-p\Delta}. \quad (66.2)$$

В свою очередь,  $f(\Delta)$  следующим образом может быть выражено через  $\varphi(p)$ :

$$f(x, \Delta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty + \sigma}^{+i\infty + \sigma} dp \varphi(p, x) e^{p\Delta}, \quad (66.3)$$

где интегрирование производится вдоль прямой линии, параллельной мнимой оси и сдвинутой вправо от последней ( $\sigma > 0$ ).

Умножая обе части уравнения (66.1) на  $\exp(-p\Delta)$  и интегрируя по  $\Delta$ , легко получаем

$$\frac{d}{dx} \varphi(p, x) = -\varphi(p, x) \int_0^{\infty} d\varepsilon w(\varepsilon) (1 - e^{-p\varepsilon}). \quad (66.4)$$

При  $x=0$ , т. е. на поверхности, где частица входит в слой, должно выполняться условие  $f(0, \Delta) = \delta(\Delta)$ , которое означает, что на этой поверхности имеется одна частица с энергией  $E = E_0$ . Тогда из (66.2) находим, что  $\varphi(p, 0) = 1$  при  $x=0$ . Интегрируя уравнение (66.4) с этим начальным условием, получаем

$$\varphi(p, x) = \exp \left[ -x \int_0^{\infty} d\varepsilon w(\varepsilon) (1 - e^{-p\varepsilon}) \right]. \quad (66.5)$$

Подставляя это решение в (66.3), получим следующее общее выражение для функции распределения, выраженной через вероятность  $w(\varepsilon)$ :

$$f(x, \Delta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty + \sigma}^{+i\infty + \sigma} dp \exp \left[ p\Delta - x \int_0^{\infty} d\varepsilon w(\varepsilon) (1 - e^{-p\varepsilon}) \right]. \quad (66.6)$$

Формула (66.6), в принципе, дает решение нашей задачи в общем случае. Для возможности ее применения необходимо знать функцию  $w(\varepsilon)$ ; вообще говоря, вид этой функции найден лишь для энергий, больших по сравнению с энергией электронов в атоме. Однако можно показать, что в случае, когда потери энергии не слишком малы, необязательно знать эту функцию полностью.

Если в области переменных  $\varepsilon$  и  $p$ , дающих существенный вклад во входящие в (66.6) интегралы, выполняется условие  $p\varepsilon \ll 1$ , то экспонента  $\exp(-p\varepsilon)$  в (66.6) может быть разложена в ряд по переменной  $(p\varepsilon)$ . Сохранив первые три члена разложения, легко показать, что распределение флюктуаций имеет гауссов вид:

$$f(x, \Delta) = (2\pi x \overline{\Delta_0^2})^{-1/2} \exp \left[ -\frac{(E_0 - E - x \overline{\Delta_0})^2}{2x \overline{\Delta_0^2}} \right], \quad (66.7)$$

где  $\overline{\Delta_0}$  — среднее значение энергии, потерянной частицей на единице длины, и  $\overline{\Delta_0^2}$  — флюктуации этих потерь энергии,

$$\overline{\Delta_0} = \int_0^{E_0} d\varepsilon \varepsilon w(\varepsilon), \quad \overline{\Delta_0^2} = \int_0^{E_0} d\varepsilon \varepsilon^2 w(\varepsilon). \quad (66.8)$$

Если в (66.7) пренебречь флюктуациями потерь энергии, т. е. перейти к пределу  $\overline{\Delta_0^2} \rightarrow 0$ , то распределение частиц по энергиям примет вид

$$f(x, \Delta) = \delta(E_0 - E - x \overline{\Delta_0}), \quad (66.9)$$

откуда следует, что после прохождения слоя вещества толщины  $x$  среднее значение потерь энергии частицы равно  $(x \overline{\Delta_0})$ . Учет флюктуаций приводит к тому, что расхождение частиц по энергиям имеет некоторый разброс относительно наиболее вероятного значения. Относительный разброс частиц по энергиям определяется выражением  $(E_0^{-1} \sqrt{2x \overline{\Delta_0^2}})$  и увеличивается с глубиной пропорционально  $\sqrt{x}$ .

Рассмотрим теперь условия применимости формулы (66.7). При выводе этой формулы предполагалось, что потеря энергии частицей в веществе мала по сравнению с энергией, т. е.

$$x \overline{\Delta_0} \ll E_0. \quad (66.10)$$

Кроме того, требуется, чтобы ширина распределения была велика по сравнению с наибольшей энергией, передаваемой частицей атомному электрону,

$$\sqrt{x \overline{\Delta_0^2}} \gg \varepsilon_{\max}. \quad (66.11)$$

Эти неравенства определяют область глубин, для которых распределение частиц по энергиям имеет гауссов вид:

$$\frac{E_0}{\Delta_0} \gg x \gg \frac{\varepsilon_{\max}^2}{\Delta_0^2}. \quad (66.12)$$



При нахождении  $\overline{\Delta_0^2}$  согласно (66.8), достаточно учесть вклад только близких столкновений частицы с атомными электронами. Энергия, передаваемая при этом атомному электрону, велика по сравнению с энергией его связи в атоме, поэтому электроны атома можно рассматривать как свободные. Вероятность передачи энергии  $\varepsilon$  электрону в этом случае определяется, согласно (65.3), формулой

$$w(\varepsilon) = \frac{2\pi e^4 n_e}{mv^2 \varepsilon^2}. \quad (66.13)$$

Тогда с учетом выражения для  $\varepsilon_{\max}$  получаем

$$\overline{\Delta_0^2} = \frac{2\pi e^4 n_e}{mv^2} W_{\max}. \quad (66.14)$$

Подставляя это соотношение в неравенства (66.12), приходим к следующим ограничениям на толщины  $x$ , для которых справедлива формула (66.7):

$$16 \text{Li} \frac{m}{M} \ll x \frac{\overline{\Delta_0}}{E_0} \ll 1, \quad E_0 \ll \frac{M^2}{m}, \quad (66.15)$$

где  $\text{Li}$  — логарифмический фактор в формуле (64.17) для  $\overline{\Delta_0}$  \*).

Если быстрая частица — электрон или позитрон, то  $\varepsilon_{\max} = E_0$  и условие (66.11) малости передаваемой энергии при одном столкновении по сравнению с энергией частицы не выполняется. В этом случае существенными могут оказаться большие флуктуации потерь энергии и использованное при выводе формулы (66.7) разложение подынтегрального выражения перестает быть справедливым. Ландау было показано [14], что распределение частиц по энергиям с учетом выражения (66.13) для вероятности  $w(\varepsilon)$  может быть записано в виде интегрального представления

$$f(x, \Delta) = \frac{1}{\xi} \varphi(\lambda), \quad (66.16)$$

где  $\xi = 2\pi x e^4 n_e / mv^2$  и

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty + \sigma}^{i\infty + \sigma} du \exp(u \ln u + \lambda u), \quad (66.17)$$

$$\lambda = \xi^{-1} \Delta - \left( \ln \frac{\xi}{\varepsilon'} + 1 - G \right). \quad (66.18)$$

Здесь  $G = 0,577$  — постоянная Эйлера,

$$\ln \varepsilon' = \ln \frac{(1-v^2)I^2}{2mv^2 W_{\max}} + v^2.$$

\*) Для нерелятивистских тяжелых заряженных частиц в некоторых случаях удается получить аналитические выражения для распределения частиц по энергиям и на больших глубинах проникновения частиц в среду, чем глубины, удовлетворяющие условию (66.15); см. монографию [15].

Таким образом, функция двух переменных  $f(x, \Delta)$  оказалась равной произведению  $\xi^{-1}$  на универсальную функцию от безразмерной переменной  $\lambda$ . Последняя представлена на рис. 9.3. Эта функция имеет максимум при  $\lambda = -0,05$ . Приведенный график показывает, что наиболее вероятное значение потерь энергии дается выражением

$$\bar{\Delta}_0 = \xi \left( \ln \frac{\xi}{\varepsilon} + 0,37 \right),$$

которое более точно, чем обычная формула Бете и Блоха для этой величины.

Из приведенного на рис. 9.3 графика следует также, что слева от максимума ( $\Delta < \bar{\Delta}_0$ , т. е. когда потери энергии меньше, чем наиболее вероятные) функция  $\varphi(\lambda)$  убывает очень быстро; справа же от максимума ( $\Delta > \bar{\Delta}_0$ ) эта функция убывает значительно медленнее.

Отметим, что формулой (66.16) можно пользоваться также и для описания потерь энергии тяжелых частиц, если условие  $x \Delta_0^2 \gg \varepsilon_{\max}^2$  не выполняется.

### § 67. Торможение электронно-позитронных пар и быстрых молекул при прохождении через вещество

В предыдущих параграфах мы видели, что существенный вклад в ионизационные потери энергии быстрых частиц в среде вносят прицельные расстояния от движущейся частицы порядка  $b_{\max} \sim v/\omega_p$ . Если в пределах этих расстояний на близком расстоянии друг от друга будет двигаться не одна, а несколько заряженных частиц, то существенной может оказаться интерференция полей, связанных с этими частицами. При этом ионизационные потери энергии частиц могут отличаться от потерь в случае, когда частицы находятся достаточно далеко друг от друга. Такая ситуация имеет место, например, при образовании в веществе высокоэнергетической электронно-позитронной пары. Действительно, компоненты электронно-позитронной пары большой энергии расходятся под малыми углами  $\vartheta \sim m/E_{\pm}$  друг к другу. При этом, как отмечалось в § 13, на участке пути порядка  $vE_{\pm}/m\omega_p$  от точки зарождения пары на больших расстояниях от частиц вследствие интерференции поля электрона и позитрона будут частично компенсировать друг друга, в результате чего ионизационные потери энергии пары должны

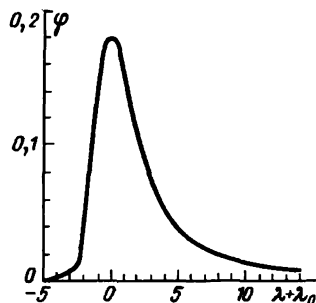


Рис. 9.3. График функции  $\varphi(\lambda)$ , определяющей распределение частиц по энергиям на заданной глубине (66.16);  $\lambda_0 = 0,05$

быть меньше удвоенных потерь энергии электрона\*). Мы изложим теорию этого эффекта, следуя работе [17].

Если позитрон и электрон в данный момент времени  $t$  находятся в точках  $\mathbf{r}_1(t)$  и  $\mathbf{r}_2(t)$ , то потери энергии пары в единицу времени равны

$$\frac{dE_{\pm}}{dt} = e [\mathbf{v}_1 \mathbf{E}(\mathbf{r}_1) - \mathbf{v}_2 \mathbf{E}(\mathbf{r}_2)], \quad (67.1)$$

где  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  — скорости позитрона и электрона, а  $\mathbf{E}$  — электрическое поле частиц пары. Поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  можно рассматривать как поле в макроскопической среде, вызванное плотностями заряда  $\rho$  и тока  $\mathbf{j}$ :

$$\begin{aligned} \rho &= e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1(t)) - e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2(t)), \\ \mathbf{j} &= e\mathbf{v}_1\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1(t)) - e\mathbf{v}_2\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2(t)). \end{aligned} \quad (67.2)$$

Подставляя эти соотношения в уравнения (64.1) для фурье-компонент потенциала электромагнитного поля и решая эти уравнения, легко показать, что фурье-разложение поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  имеет вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{ie}{2\pi^2} \int d^3\mathbf{k} \left\{ \frac{\mathbf{v}_1\omega_1 - \mathbf{k}/\varepsilon(\omega_1)}{\mathbf{k}^2 - \omega_1^2\varepsilon(\omega_1)} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)} - \frac{\mathbf{v}_2\omega_2 - \mathbf{k}/\varepsilon(\omega_2)}{\mathbf{k}^2 - \omega_2^2\varepsilon(\omega_2)} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)} \right\}, \quad (67.3)$$

где  $\varepsilon(\omega)$  — диэлектрическая проницаемость среды, соответствующая частоте  $\omega$ ;  $\omega_1 = \mathbf{k}\mathbf{v}_1$  и  $\omega_2 = \mathbf{k}\mathbf{v}_2$ . При выводе этого соотношения предполагалось, что траектории зарядов являются прямолинейными.

Подставляя (67.3) в (67.1), получим

$$\frac{dE_{\pm}}{dt} = 2 \frac{dE_-}{dt} - T_{\pm}, \quad (67.4)$$

где  $dE_-/dt$  — ионизационное торможение одного электрона, а  $T_{\pm}$  — интерференционный член;

$$\begin{aligned} T_{\pm} &= \frac{ie^2}{2\pi^2} \int d^3\mathbf{k} \left\{ \frac{(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2)\omega_1 - \omega_2/\varepsilon(\omega_1)}{\mathbf{k}^2 - \omega_1^2\varepsilon(\omega_1)} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1)\omega_2 - \omega_1/\varepsilon(\omega_2)}{\mathbf{k}^2 - \omega_2^2\varepsilon(\omega_2)} e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)} \right\}. \end{aligned} \quad (67.5)$$

В рассматриваемом процессе поперечное расхождение компонент пары значительно больше продольного. Действительно, последнее пропорционально  $v_2 - v_1 \sim (m/E)^2$ , в то время как первое определяется углом разлета пары  $\vartheta \sim m/E$  и углом многократного рассеяния. Поэтому при вычислении  $T_{\pm}$  можно заменить в экспоненте  $\mathbf{k}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$  на  $sk_x$ , где  $s = x_2 - x_1$  — расстояние между частицами пары в плоскости, ортогональной  $\mathbf{v}_1$  или  $\mathbf{v}_2$ . После этого в (67.5) можно выполнить интег-

\*) На этот эффект впервые обратил внимание Чудаков [16].

рирование по  $k_z$  так же, как это было сделано при интегрировании по  $\omega$  в формуле (65.12). В результате находим, что

$$T_{\pm} = \frac{e^2 \omega_p^2}{\pi} \int dk_x dk_y \frac{\cos sk_x}{k_x^2 + k_y^2 + \omega_p^2} = 2e^2 \omega_p^2 K_0(s\omega_p), \quad (67.6)$$

где  $K_0(s\omega_p)$  — модифицированная функция Ханкеля.

Подставляя (67.6) в (67.4), приходим к следующей формуле для потерь энергии образующейся в веществе электронно-позитронной пары:

$$\frac{dE_{\pm}}{dt} = 2 \frac{e^2 \omega_p^2}{v} \left[ \ln \frac{\sqrt{2m W_{\max}}}{\hbar \omega_p} - K_0(s\omega_p v^{-1}) \right]. \quad (67.7)$$

При больших значениях расстояний  $s$  между компонентами пары, когда  $s\omega_p/v \gg 1$ , интерференционный эффект исчезает и

$$\frac{dE_{\pm}}{dt} = 2 \frac{dE_{-}}{dt}. \quad (67.8)$$

Если же выполняется условие  $s\omega_p/v \ll 1$ , то можно воспользоваться представлением  $K_0(x) \approx \ln(2/\gamma x)$ , где  $\gamma = \exp G = 1.78$ . При этом

$$\frac{dE_{\pm}}{dt} = 2 \frac{e^2 \omega_p^2}{v} \ln(s \sqrt{2m W_{\max}}). \quad (67.9)$$

Таким образом, при  $s\omega_p/v \ll 1$  ионизационные потери энергии образующейся в веществе электронно-позитронной пары, оказываются меньшими удвоенной ионизации электрона.

Заметим, что аналогичный эффект имеет место при так называемом «кулоновском взрыве» быстрых молекул в тонком слое вещества [18, 19]. А именно, если быстрая молекула, состоящая, например, из двух протонов, влетает в мишень, то в пределах нескольких атомных слоев валентный электрон отрывается от молекулы. В результате образуются два протона, летящих в направлении движения молекулы и находящихся на близком расстоянии друг от друга. Вследствие кулоновского расталкивания расстояние между протонами увеличивается с ростом глубины их проникновения в мишень.

Если скорость молекулы будет достаточно велика по сравнению со скоростью, приобретаемой частицами в результате кулоновского расталкивания, то частицы в течение длительного времени будут находиться на расстоянии  $s$  друг от друга, меньшем  $v/\omega_p$ . При этом, в отличие от рассмотренного выше случая образования пары, поля протонов на больших расстояниях от частиц будут складываться, в результате чего ионизационные потери энергии компонент молекулы будут больше удвоенных потерь энергии протона.

Действительно, в рассматриваемом случае при вычислении потерь энергии можно воспользоваться формулами (67.1) и (67.2), с той лишь разницей, что знак во вторых слагаемых

в этих формулах необходимо изменить на обратный. При этом, в отличие от (67.7), полные потери энергии будут определяться формулой

$$\frac{dE_{++}}{dt} = 2 \frac{e^2 \omega_p^2}{v} \left[ \ln \frac{\sqrt{2mv^2 W_{\max}}}{v} + K_0 (s\omega_p v^{-1}) \right]. \quad (67.10)$$

Отсюда находим, что если расстояние между протонами достаточно велико ( $s\omega_p v \gg 1$ ), то потери энергии  $dE_{++}/dt$  совпадают с удвоенными потерями энергии протона

$$\frac{dE_{++}}{dt} = 2 \frac{dE_p}{dt}. \quad (67.11)$$

При  $s\omega_p v \ll 1$  согласно (67.10),

$$\frac{dE_{++}}{dt} > 2 \frac{dE_p}{dt}. \quad (67.12)$$

Таким образом, когда быстрая молекула пролетает через тонкий слой вещества и происходит ее ионизация, тогда если расстояние между протонами меньше величины  $v/\omega_p$ , потери энергии компонент молекулы оказываются большими удвоенных потерь энергии протона. Аналогичная ситуация имеет место и при развале молекул, состоящих из трех и большего числа протонов (см., например, [18]).

## § 68. Торможение при каналировании

При выводе формулы (64.17) предполагалось, что распределение электронов среды по прицельным параметрам относительно движущейся частицы является равномерным. Такая ситуация имеет место при прохождении частицы через аморфную среду, в которой положения атомов распределены хаотично. Если же движение происходит в регулярной среде, например в монокристалле, то возможно отклонение распределения электронов среды относительно движущейся частицы от равномерного. Потери энергии частицей в этом случае могут отличаться от потерь энергии в аморфной среде.

Для того чтобы разъяснить, в чем здесь дело, рассмотрим ионизационные потери энергии при движении быстрой частицы в монокристалле вдоль одной из его кристаллических осей. В этом случае, как показано в гл. 5, возможно явление каналирования, при котором частицы движутся в каналах, образованных цепочками атомов кристалла, отклоняясь относительно оси канала на малые углы. Движение положительно и отрицательно заряженных частиц в кристалле в этих условиях существенно различается, поэтому мы рассмотрим отдельно потери энергии положительно и отрицательно заряженных частиц.

Определим вначале потери энергии положительно заряженных частиц (ионов, протонов, позитронов, мюонов,  $\pi$ -мезонов и др.). Если угол  $\psi$  между импульсом частицы и кристаллической осью мал по сравнению с критическим углом осевого каналирования, то, как мы видели, положительно заряженные частицы не могут подходить на близкие расстояния  $\rho \sim R$  к атомам решетки, где электронная плотность максимальна, и, следовательно, близкие столкновения частицы с электронами среды в этом случае будут подавлены по сравнению со случаем движения в аморфной среде. При выводе формулы Бете и Блоха мы видели, что основной вклад в ионизационные потери энергии вносят как далекие, так и близкие столкновения частицы с электронами среды. Существенным при этом является то, что при высоких энергиях вклады в потери энергии, обусловленные далекими и близкими столкновениями, оказываются примерно одинаковыми [20, 21].

Действительно, если мы разделим область прицельных параметров  $b_{\max} \geq b \geq b_{\min}$  на интервалы  $b_{\max} \geq b \geq R$  и  $R \geq b \geq b_{\min}$ , где  $R$  — радиус атома Томаса — Ферми, то, как легко проверить, вклады в (63.9), вносимые далекими ( $b > R$ ) и близкими ( $b < R$ ) столкновениями, будут примерно одинаковы. В случае прохождения положительно заряженных частиц через кристалл под малым углом к одной из его осей ( $\psi \lesssim \psi_c$ ) близкие столкновения оказываются подавленными по сравнению со случаем аморфной среды, поэтому формула (63.9) должна быть модифицирована с учетом этого результата. Имея в виду получение качественных оценок для потерь энергии частицы в кристалле на основе изложенных соображений, формулу (63.9) можно заменить выражением

$$\frac{dE}{dt} = \left( \frac{dE}{dt} \right)_a \left[ (1 - \alpha) + \alpha \frac{n(\mathbf{r})}{n_e} \right], \quad (68.1)$$

где  $\alpha \geq 1/2$  — коэффициент, определяющий долю полных потерь энергии  $(dE/dt)_a$ , связанную с близкими соударениями (последняя величина в случае прохождения частицы через кристалл должна быть модифицирована),  $n(\mathbf{r})$  — локальная плотность электронов в кристалле в точке нахождения частицы и  $n_e$  — средняя электронная плотность в кристалле. Слагаемое  $(1 - \alpha)(dE/dt)_a$  в (68.1) определяет вклад в потери энергии, обусловленный далекими столкновениями; слагаемое  $(\alpha n(\mathbf{r})/n_e)(dE/dt)_a$  определяет вклад, обусловленный близкими столкновениями.

Мы видим, что величина  $dE/dt$  определяется локальной плотностью электронов в решетке на траектории частицы, поэтому формула (68.1) должна быть усреднена по различным траекториям. Учитывая, что при малых значениях угла  $\psi$  между импульсом частицы и кристаллической осью изменение плотности  $n(\mathbf{r})$  между последовательными столкновениями частицы

с атомами решетки мало, входящую в (68.1) величину  $n(\mathbf{r})$  можем заменить на среднее значение этой плотности вдоль оси  $z$ :

$$n(\mathbf{r}) \rightarrow n(\rho) = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{+d/2} dz n(\mathbf{r}).$$

В интересующей нас области углов  $\psi$  ( $\psi < \psi_c$ ) столкновения частицы с различными цепочками атомов можно рассматривать как случайные, поэтому для нахождения среднего значения потерь энергии можно воспользоваться формулой § 58:

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{\psi}{\bar{a}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} db \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{dE(\rho, \tau)}{dt},$$

где  $dE(\rho, \tau)/dt$  — потеря энергии при столкновении с отдельной цепочкой атомов. В результате приходим к следующему выражению для среднего значения потерь энергии:

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \left( \frac{dE}{dt} \right)_a \left[ 1 - \alpha + \alpha \frac{n^*(\varepsilon_{\perp})}{n_e} \right], \quad (68.2)$$

где

$$n^*(\varepsilon_{\perp}) = \frac{2\pi}{nd} \int_{\rho_{\min}}^{\rho_0} \rho d\rho \int_{-d/2}^{+d/2} dz n(\mathbf{r}). \quad (68.3)$$

Здесь  $\rho_{\min}$  и  $\rho_0$  определяются из соотношений

$$\varepsilon_{\perp} = U_r(\rho_{\min}), \quad \varepsilon_{\perp} = \frac{1}{2} E \psi^2, \quad (\pi \rho_0^2)^{-1} = nd$$

и  $n$  — плотность атомов.

Формула (68.3) показывает, что при  $\psi \ll \psi_c$  величина  $\rho_{\min} \gg R$ , и, следовательно,  $n^*(\varepsilon_{\perp})$  будет определяться только плотностью валентных электронов в решетке. Для тяжелых элементов число валентных электронов мало по сравнению с полным числом электронов, поэтому  $n^* \ll n_e$  и мы приходим к следующему выражению для средних потерь энергии положительно заряженных частиц:

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle \approx (1 - \alpha) \left( \frac{dE}{dt} \right)_a. \quad (68.4)$$

Так как  $\alpha \approx 1/2$ , то величина  $\langle dE/dt \rangle$  оказывается примерно в два раза меньшей соответствующей величины для аморфной среды.

Если же  $\psi > \psi_c$ , то  $n^*(\varepsilon_{\perp}) = n_e$  и, согласно (68.2), потери энергии в кристалле и в аморфной среде совпадают. Заметим,

однако, что этот результат относится к частицам, совершающим хаотическое движение в поперечной плоскости (для таких частиц столкновения с различными цепочками атомов можно рассматривать как случайные). При  $\psi > \psi_c$  однако, как показано в § 40, некоторая часть частиц пучка может совершать регулярное движение вдоль кристаллических плоскостей, причем уже при значениях  $\psi$  порядка нескольких критических углов каналирования, доля частиц, совершающих регулярное движение, значительна, поэтому при больших значениях углов  $\psi$  среднее значение потерь энергии должно определяться с учетом различного характера движения частиц в поперечной плоскости (см. по этому поводу работы [22, 23]).

Рассмотрим теперь ионизационные потери энергии движущихся в кристалле отрицательно заряженных частиц (электронов,  $\pi$ -мезонов и др.). Анализ этого процесса, как и в случае положительно заряженных частиц, может быть проведен на основе формулы (68.1). При этом различие между процессами потерь энергии положительно и отрицательно заряженных частиц будет обусловлено только различием траекторий этих частиц в кристалле.

Если же угол  $\psi$  между импульсом частицы и кристаллической осью достаточно мал ( $\psi \sim \psi_c$ ) и частица совершает надбарьерное хаотическое движение в поперечной плоскости, то среднее значение потерь энергии отрицательно заряженных частиц будет определяться формулой (68.2) с той лишь разницей, что входящая в нее величина  $\rho_{\min}$  должна быть положена равной нулю. При этом  $n^* = n_e$  и, следовательно,

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_- = \left( \frac{dE}{dt} \right)_a. \quad (68.5)$$

При  $\psi < \psi_c$  наряду с надбарьерным движением возможно явление каналирования отрицательно заряженной частицы. Канализованная частица движется в области с большей средней плотностью электронов среды, чем надбарьерная частица, поэтому потери энергии канализованной частицы, обусловленные близкими соударениями, должны быть больше соответствующих потерь энергии в аморфной среде. Для оценки этого эффекта определим потери энергии в случае, когда траектория канализованной частицы определяется только точкой ее влета в кристалл, т. е. когда перераспределение частиц по поперечным энергиям мало.

Средние значения потерь энергии в этом случае могут быть записаны в виде

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \left( \frac{dE}{dt} \right)_a \left\{ [1 - \Phi(\psi)] + \frac{1}{\bar{a}^2} \int d^2 \rho_0 \frac{1}{T(\rho_0, \psi)} \int_0^T d\tau \frac{dE(\rho(\tau))}{dt} \right\}, \quad (68.6)$$



где  $\Phi(\psi)$  — доля частиц, захваченных в канал при входе параллельного пучка частиц в кристалл.

Первое слагаемое в квадратных скобках в (68.6) определяет долю частиц, совершающих надбарьерное движение; второе слагаемое определяет вклад каналированных частиц. Подставляя в (68.6) соотношение (68.1), находим, что

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_- = \left( \frac{dE}{dt} \right)_a \left\{ 1 - \Phi(\psi) + (1 - \alpha)\Phi(\psi) + \alpha \frac{n_c^*(\epsilon_\perp)}{n_e} \right\}, \quad (68.7)$$

где

$$n_c^* = \frac{1}{\bar{a}^2} \int d^2 \rho_0 \frac{1}{T(\rho_0, \psi)} \int_0^T d\tau n(\rho(\tau)). \quad (68.8)$$

При  $\psi \rightarrow 0$  существенный вклад в интеграл по  $\tau$  в (68.8) вносят значения  $\Delta\tau \sim 4R/\psi_c$ . Период колебания в этом случае по порядку величины равен  $T \sim 2\bar{a}/\psi$ ; область интегрирования порядка  $\pi\bar{a}^2/8$ ; плотность электронов  $n(\rho)$  максимальна в области  $\rho \lesssim R$  и по порядку величины в этой области равна  $n(\rho) \sim 1/\pi R^2 d$ . Таким образом, по порядку величины

$$\frac{n_c^*}{n_e} \lesssim \frac{1}{4} \frac{\bar{a}}{R}. \quad (68.9)$$

С учетом этой оценки имеем

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_- \sim \left( \frac{dE}{dt} \right)_a \left[ 1 - \alpha\Phi(\psi) + \alpha \frac{\bar{a}}{4R} \right].$$

В случае движения частиц в кристалле кремния вдоль оси  $\langle 111 \rangle$  отношение  $\bar{a}/R$  порядка 8,  $\Phi(\psi) \sim 0,8$  (см. рис. 5.11), и, следовательно, при  $\alpha \approx 1/2$  имеем

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_- \sim 1,6 \left( \frac{dE}{dt} \right)_a.$$

Таким образом, при каналировании отрицательно заряженных частиц ионизационные потери энергии должны быть несколько выше потерь энергии в аморфной среде\*).

## § 69. Радиационные потери энергии быстрых частиц во внешнем поле

При движении во внешнем электромагнитном поле быстрая заряженная частица теряет свою энергию на излучение. Определим величину этих потерь (они называются радиационными)

\*) Двукратное уменьшение ионизационных потерь энергии быстрых положительно заряженных частиц при прохождении через кристалл вдоль кристаллической оси и небольшое увеличение потерь энергии для отрицательно заряженных частиц наблюдалось во многих экспериментах (см. обзоры [24, 25]).

при движении электрона или позитрона высокой энергии в слабонеоднородном внешнем поле. Рассмотрим вначале излучение в рамках классической электродинамики.

Спектральная плотность излучения электрона в классической электродинамике была получена в § 3. Проинтегрировав эту формулу по частотам, получим радиационные потери энергии частицей во внешнем поле

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{2e^2}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\mathbf{W}^2 - [\mathbf{v} \times \mathbf{W}]^2}{1 - v^2}, \quad (69.1)$$

где  $\mathbf{W} = \dot{\mathbf{v}}$  — ускорение частицы.

Эти потери энергии могут быть выражены также непосредственно через напряженности электрического и магнитного полей. Используя уравнение движения частицы в заданном электромагнитном поле, находим, что

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{2e^2}{3m^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{(\mathbf{E} - [\mathbf{v}, \mathbf{H}])^2 - (\mathbf{E}, \mathbf{v})}{1 - v^2}. \quad (69.2)$$

Заметим, что вместе с энергией теряется и импульс частицы. Потеря импульса определяется формулой, аналогичной (69.1):

$$\Delta \mathbf{P} = \frac{2e^2}{3} \int dt \mathbf{v} \frac{\mathbf{W}^2 - [\mathbf{v}, \mathbf{W}]^2}{1 - v^2}.$$

Мы видим, что для релятивистских частиц полные потери энергии на излучение в основном пропорциональны квадрату энергии движущейся частицы. Исключение составляет только движение в электрическом поле вдоль направления поля. В этом случае, согласно (69.2), излучение оказывается не зависящим от энергии.

Если движение электрона происходит по окружности в постоянном магнитном поле, то согласно (69.2)

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2e^4 \mathbf{H}^2}{3m^2} E^2. \quad (69.3)$$

Величина, обратная  $d\mathcal{E}/dt$ , представляет собой произведение скорости частицы на силу, действующую на частицу в результате излучения электромагнитных волн. Последняя при высоких энергиях пропорциональна  $E^2$ . Сравнивая эту силу с внешней силой  $eF$ , где  $F$  — напряженность внешнего поля, находим, что при выполнении условия

$$\frac{e^3 F}{m^2(1 - v^2)} \gg 1 \quad (69.4)$$

торможение излучением является основной действующей на частицу силой. Потери энергии частицей на единице длины

в этом случае можно считать связанными только с силой радиационного торможения. При этом

$$\frac{dE}{dx} = -K(x)E^2, \quad (69.5)$$

где координата  $x$  параллельна скорости частицы и

$$K(x) = \frac{2e^4}{3m^4} [(E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2]. \quad (69.6)$$

Здесь  $E_y$ ,  $H_y$  и  $E_z$ ,  $H_z$  — компоненты векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , параллельные осям  $y$  и  $z$ .

Интегрируя уравнение (69.5), находим

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{E_0} + \int_{-\infty}^x dx' K(x'), \quad (69.7)$$

здесь  $E_0$  — начальная энергия электрона.

Полагая в (69.7)  $x \rightarrow \infty$ , видим, что при  $E_0 \rightarrow \infty$  конечная энергия электрона стремится к конечному пределу, не зависящему от  $E_0$ . Таким образом, после пролета через поле энергия частицы не может превысить значения  $E_{cr}$ , определяемого равенством

$$\frac{1}{E_{cr}} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx K(x). \quad (69.8)$$

Этот результат был получен Померанчуком [26] при изучении излучения электронов космических лучей в магнитном поле Земли.

Обсудим теперь условия применимости полученных формул. При выводе этих формул мы пользовались классической теорией, что можно считать оправданным, если напряженность внешнего поля в системе покоя частицы мала по сравнению с полем порядка  $e/r_0^2 = m^2/e^3$  на «краю электрона», где  $r_0$  — классический радиус электрона [27]. В лабораторной системе это условие приводит к неравенству

$$\frac{e^3}{m^2} FE \ll 1. \quad (69.9)$$

Кроме того, требуется, чтобы были малы эффекты, связанные с отдачей при излучении. Последние, как показано в § 15, при высоких энергиях определяются параметром  $\omega/E$ , поэтому условие  $\omega \ll E$  должно выполняться в области характерных частот излучения электрона во внешнем поле. В электромагнитном поле напряженности  $F$ , согласно (5.8),  $\omega \sim eF\gamma^2 m^{-1}$ ,

и, следовательно, условие малости отдачи при излучении имеет вид

$$\frac{eF}{m^3} E \ll 1. \quad (69.10)$$

Это неравенство является более жестким, чем неравенство (69.9), вытекающее из условий применимости классической электродинамики. Иными словами, квантовые эффекты начинают играть роль раньше, чем ограничения, связанные с применимостью классической электродинамики.

Заметим, что неравенство (69.10) не противоречит неравенству (69.4), так что существует интервал энергий  $E$ , в котором оба эти неравенства могут быть выполнены одновременно. Это означает, что существует интервал энергий, в котором эффекты, связанные с отдачей, малы и в то же время потери энергии частицы определяются силой радиационного торможения, а не внешнего поля. Для этого необходимо, чтобы энергия частицы удовлетворяла неравенствам

$$\sqrt{\frac{m^2}{e^3 F}} \ll \frac{E}{m} \ll \frac{m^2}{eF}. \quad (69.11)$$

С ростом энергии частицы и с увеличением напряженности внешнего поля неравенство  $\omega \ll E$  нарушается в области характерных частот излучения, и, следовательно, в этом случае необходим учет эффекта отдачи. Рассмотрим роль этого эффекта на примере излучения электрона в постоянном магнитном поле.

Спектральная плотность излучения быстрого электрона в магнитном поле с учетом эффекта отдачи, испытываемой частицей при излучении, была получена в § 17. Проинтегрировав эту формулу по частотам в пределах от  $\omega=0$  до  $\omega=E_0$ , получим

$$\frac{d\mathcal{E}_H}{dt} = -\frac{e^2 m^2 \chi^2}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x dx \frac{4 + 5\chi x^{3/2} + 4\chi^2 x^3}{(1 + \chi x^{3/2})^4} \frac{d}{dx} \Phi(x), \quad (69.12)$$

где  $\chi = eH\gamma m^{-2}$ .

При  $\chi \ll 1$  эта формула с учетом первой квантовой поправки дает

$$\frac{d\mathcal{E}_H}{dt} = \frac{d\mathcal{E}_{cl}}{dt} \left( 1 - \frac{55\sqrt{3}}{16} \chi + \dots \right), \quad (69.13)$$

где  $d\mathcal{E}_{cl}/dt = 2e^4 H^2 E^2 / 3m^4$  — классическая полная интенсивность излучения электрона в магнитном поле.

Если же  $\chi \gg 1$ , то основной вклад в интеграл по  $x$  в (69.12) дают  $x \ll 1$ . В этом случае в первом приближении по параметру  $\chi^{-1}$  в подынтегральном выражении  $\Phi'(x)$  можно заменить

на значение этой функции в нуле  $\Phi'(0) = -3^{1/6} \Gamma(2/3) / 2\sqrt{\pi}$ , в результате чего получаем

$$\frac{d\mathcal{E}_H}{dt} = \frac{32\Gamma(2/3)e^2m^2}{243} (3\chi)^{2/3} \approx 0,82e^2m^2 \left(\frac{eHE}{m^3}\right)^{2/3}. \quad (69.14)$$

Отметим, что радиационные потери энергии в этом случае растут с энергией по закону  $E^{2/3}$ , в то время как согласно классической теории потери энергии растут, как  $E^2$ . Различие между обоими результатами обусловлено тем, что при выполнении вычислений по формулам классической электродинамики максимум излучения находился бы в области частот  $\omega \gg E$ , тогда как согласно квантовой теории должно выполняться условие  $\omega \leq E$ . Таким образом, классический максимум спектрального распределения излучения при выполнении условия  $\chi \gg 1$  в действительности не достигается.

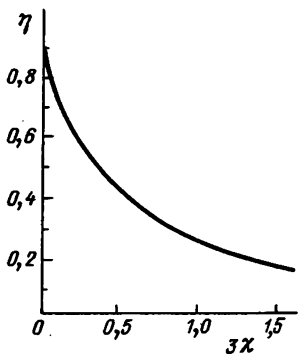


Рис. 9.4. График функции  $\eta(3\chi)$ , определяющей радиационные потери энергии быстрой частицы в магнитном поле с учетом эффекта отдачи

График функции  $\eta = \mathcal{E}'_H / \mathcal{E}'_{cl}$  при произвольных значениях  $\chi$  представлен на рис. 9.4.

Полученные результаты показывают, что при движении электрона в постоянном магнитном поле изменение зависимости радиационных потерь энергии частицы от энергии самой частицы связано с учетом эффекта отдачи при излучении и имеет место только в области очень высоких энергий  $E$ . Это, однако, не означает, что в случае меньших энергий, т. е. при энергиях, для которых в области характерных частот излучения выполняется условие  $\omega \ll E$ , при рассмотрении излучения электронов квантовым эффектом отдачи можно пренебречь. А именно, оказывается, что его необходимо учитывать при анализе спектрального разброса излучающих частиц.

Чтобы показать это, рассмотрим распределение по энергиям электронов, движущихся в магнитном поле по окружности [28]. Это распределение, очевидно, будет изменяться со временем вследствие излучения фотонов. При этом функция распределения частиц по энергиям  $\Pi(E, t)$  к моменту времени  $t$  будет определяться уравнением

$$\frac{d}{dt} \Pi(E) = \int_0^{\infty} d\omega [\Pi(E+\omega) w_e(E+\omega, \omega) - \Pi(E) w_e(E, \omega)], \quad (69.15)$$

где  $w_e(E, \omega)$  — отнесенная к единице длины вероятность излучения электроном с энергией  $E$  фотона с энергией  $\omega$ .

Заметим, что полученное уравнение для  $\Pi(E)$  по существу совпадает с соответствующим уравнением (66.1) для функции распределения быстрых частиц, теряющих свою энергию на ионизацию. Различие между двумя этими уравнениями состоит только в конкретном виде функций  $w(E)$  и  $w_e(E, \omega)$ .

Характерные частоты излучения фотонов в интересующей нас области энергий электронов малы, поэтому в (69.15) может быть выполнено разложение по параметру  $\omega/E$ . Первые три члена разложения имеют вид

$$w_e(E+\omega, \omega)\Pi(E+\omega) \approx \Pi(E)w_e(E, \omega) + \\ + \omega \frac{\partial}{\partial E} [\Pi(E)w_e(E, \omega)] + \frac{1}{2} \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial E^2} [\Pi(E)w_e(E, \omega)] + \dots$$

При этом уравнение (69.15) приобретает вид

$$\frac{d}{dt} \Pi(E) = \frac{\partial}{\partial E} [\Pi(E)\bar{\Delta}(E)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial E^2} [\Pi(E)\bar{\Delta}^2(E)], \quad (69.16)$$

где

$$\bar{\Delta} = \int_0^{\infty} d\omega \omega w_e(E, \omega), \quad \bar{\Delta}^2 = \int_0^{\infty} d\omega \omega^2 w_e(E, \omega). \quad (69.17)$$

Если общие потери энергии частицей на излучение малы, то входящие в (69.16) величины  $\bar{\Delta}(E)$  и  $\bar{\Delta}^2(E)$  могут быть заменены на  $\Delta(E_0)$  и  $\Delta^2(E_0)$ , где  $E_0$  — начальная энергия электрона. Решение уравнения (69.16), удовлетворяющее граничному условию

$$\Pi(E, t)|_{t=0} = \delta(E - E_0),$$

имеет вид

$$\Pi(E) = (2\pi t \bar{\Delta}^2(E_0))^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{(E_0 - E - t\bar{\Delta}(E_0))^2}{2t\bar{\Delta}^2(E_0)} \right\}. \quad (69.18)$$

Это выражение для  $\Pi(E)$  может быть получено также из формулы (66.7), если в последней заменить  $\bar{\Delta}_0$  и  $\bar{\Delta}_0^2$  на  $\bar{\Delta}(E_0)$  и  $\bar{\Delta}^2(E_0)$ .

Входящие в (69.18) величины  $\bar{\Delta}(E_0)$  и  $\bar{\Delta}^2(E_0)$  определяют средние значения потерь энергии на излучение и средние значения флуктуаций этих потерь энергии на единице пути.

Подставляя в (69.17) формулу для вероятности излучения электроном фотона в магнитном поле, находим, что

$$\overline{\Delta^2}(E_0) = \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{e^4 H^2}{m^2 \mathcal{R}_H} \left( \frac{E_0}{m} \right)^5, \quad (69.19)$$

где  $\mathcal{R}_H = E/eH$  — радиус орбиты электрона. Зная  $\overline{\Delta^2}(E_0)$ , легко найти флюктуацию радиуса орбиты электрона в магнитном поле:

$$\overline{(\Delta \mathcal{R}_H)^2} = \overline{\mathcal{R}_H^2} - (\mathcal{R}_H)^2 = \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{e^2}{m^2 \mathcal{R}_H} \left( \frac{E_0}{m} \right)^5 t. \quad (69.20)$$

Это выражение совпадает с соответствующим результатом работы [29], полученным другим путем.

Формула (69.20) показывает, что за время, равное периоду одного колебания, смещение радиуса орбиты электрона на 1 см может произойти уже при  $\gamma \sim 10^4$ . При изучении же средних потерь энергии в этом случае эффектом отдачи при излучении можно пренебречь.

## § 70. Радиационные потери энергии релятивистских электронов в аморфной среде

Быстрая заряженная частица при движении в веществе теряет свою энергию не только на ионизацию и возбуждение атомов среды, но и на излучение электромагнитных волн. Вероятность последнего процесса обратно пропорциональна квадрату массы частицы, поэтому для тяжелых частиц, таких как протоны, мезоны и др., основными являются ионизационные потери энергии, тогда как легких частиц (электронов или позитронов) радиационные потери энергии могут стать не только значительными, но и определяющими при прохождении частиц через вещество. Рассмотрим вначале радиационные потери энергии быстрых электронов (позитронов) в аморфной среде.

Процесс излучения быстрого электрона разыгрывается на длине когерентности, продольный размер которой растет с ростом энергии частицы. Если эта длина будет мала по сравнению с длиной свободного пробега частицы в веществе между последовательными столкновениями с атомами, то процессы излучения на этих атомах можно считать независимыми. При этом вероятность излучения на единице пути может быть связана с сечением излучения на отдельном атоме соотношением

$$dw = nd\sigma_\gamma, \quad (70.1)$$

где  $n$  — плотность атомов среды. В случае частиц высоких энергий величину  $d\sigma_\gamma$  можно определить, используя борновское приближение.

В борновском приближении, как показано в § 12, сечение излучения электрона в поле отдельного атома пропорционально квадрату фурье-компоненты потенциала атома. При этом спектральное распределение излучения существенно зависит от соотношения между радиусом экранировки потенциала атома  $R$  и длиной когерентности  $l_c = 2EE'/m^2\omega$ .

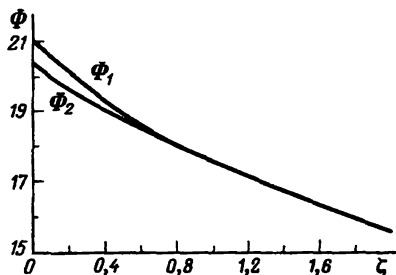


Рис. 9.5. График функций  $\Phi_{1,2}(\zeta)$ , определяющих влияние эффекта экранирования потенциала атома на тормозное излучение

Вводя атомный формфактор в модель атома Томаса—Ферми, спектр излучения релятивистских электронов можно записать в виде [30, 31]

$$d\sigma_\gamma = \frac{Z^2 e^6 d\omega}{m^2 \omega E^2} \left\{ (E^2 + E'^2) \left[ \Phi_1(\zeta) - \frac{4}{3} \ln Z \right] - \frac{2}{3} EE' \left[ \Phi_2(\zeta) - \frac{4}{3} \ln Z \right] \right\}, \quad (70.2)$$

где  $\zeta = 200e^2 R/l_c$ ,  $E' = E - \omega$ ,  $\Phi_1(\zeta)$  и  $\Phi_2(\zeta)$  — функции, изображенные на рис. 9.5.

Величина  $\zeta$ , пропорциональная ( $R/l_c$ ), определяет эффект экранирования, т. е. влияние на излучение экранирования поля ядра внешними электронами. При больших значениях  $\zeta$  ( $\zeta \gg 1$ ) эффект экранирования отсутствует и сечение излучения определяется формулой

$$d\sigma_\gamma = \frac{4Z^2 e^6 d\omega}{m^2 \omega E^2} \left( E^2 + E'^2 - \frac{2}{3} EE' \right) \left( \ln \frac{2EE'}{m\omega} - \frac{1}{2} \right). \quad (70.3)$$

Если же  $\zeta \ll 1$ , то можно говорить о полном экранировании; в этом случае  $\Phi_1(0) = 4 \ln 183$ ,  $\Phi_2(0) = 4 \ln 183 - 2/3$  и сечение (70.2) приобретает вид

$$d\sigma_\gamma = \frac{4Z^2 e^6 d\omega}{m^2 \omega E^2} \left\{ \left( E^2 + E'^2 - \frac{2}{3} EE' \right) \ln 183 Z^{-1/3} + \frac{1}{9} EE' \right\}. \quad (70.4)$$

Сечение излучения в этих условиях, в отличие от случая  $\zeta \gg 1$ , при заданном отношении  $\omega/E$  не зависит от первичной энергии частицы.

На рис. 9.6 представлена зависимость сечения тормозного излучения от отношения энергии фотона к энергии электрона ( $E \gg m$ ), справедливая при произвольных значениях параметра  $\zeta$ . Вычисления выполнялись по формуле (70.2) при взаимодействии электрона с атомом свинца.



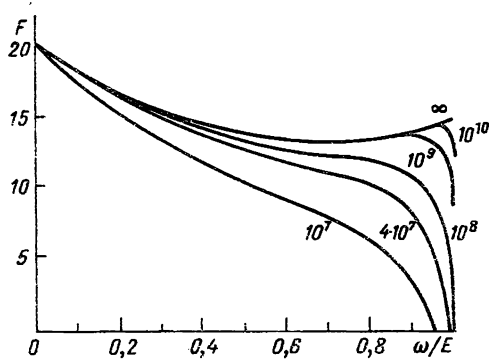


Рис. 9.6. Зависимость сечения, тормозного излучения электрона в поле атома свинца от энергии излученного фотона при различных значениях энергии излучающей частицы (цифры у кривых в эВ). По оси ординат отложена функция  $F$ , связанная с сечением

$$\text{излучения (70.2) соотношением } F = \omega \frac{d\sigma}{d\omega} \frac{E - m}{m} \frac{m^2}{Z^2 e^6}$$

Определим теперь средние значения полных радиационных потерь энергии электрона при его движении в веществе. Эта величина, отнесенная к единице пути, очевидно, равна

$$\frac{dE}{dt} = -n \int_0^E \omega d\sigma_\gamma. \quad (70.5)$$

Подставляя в эту формулу сечение (70.3), находим, что в случае  $\zeta \gg 1$ , когда эффектом экранирования можно пренебречь,

$$\frac{dE}{dt} = -4nE \left( \ln \frac{2E}{m} - \frac{1}{3} \right) \frac{Z^2 e^6}{m^2}. \quad (70.6)$$

В случае же полного экранирования получаем

$$\frac{dE}{dt} = -4nE \ln(183Z^{-1/3})(1 + \eta) \frac{Z^2 e^6}{m^2}, \quad (70.7)$$

где  $\eta = 1/18 \ln(183Z^{-1/3})$ . Величина  $\eta$  мала по сравнению с единицей (для свинца, например,  $\eta \approx 0,015$ ). Пренебрегая этой величиной, запишем (70.7) в виде

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{E}{L_R}, \quad (70.8)$$

где  $L_R$  — радиационная длина, определяемая формулой (20.10).

Таким образом, мы видим, что при высоких энергиях радиационные потери энергии электрона в веществе пропорциональны энергии частицы, причем расстояние, на котором происходит существенное изменение энергии  $\Delta E \sim E$ , по порядку величины равно радиационной длине.

Сравним радиационные потери энергии электрона в веществе с ионизационными потерями. Последние, как показано в § 63, в отличие от радиационных, растут с энергией логарифмически, поэтому начиная с некоторой энергии  $E = E^*$  эти потери сравниваются между собой и при дальнейшем увеличении  $E$  радиационные потери энергии будут превосходить ионизационные (величина  $E^*$  носит название критической энергии [33]). Используя формулы (70.8) и (63.1), легко проверить, что величина  $E^*$  по порядку величины равна

$$E^* = 1600m/Z. \quad (70.9)$$

Для свинца, например,  $E^* = 10$  МэВ; для меди — 55 МэВ; для воздуха — 200 МэВ.

Другое характерное различие между радиационными и ионизационными потерями энергии состоит в том, что в первом случае одна и та же энергия теряется посредством меньшего числа взаимодействий, но более крупными порциями (см. рис. 9.3 и 9.6). Поэтому если электроны данной энергии, проходя через заданный слой вещества, теряют практически одну и ту же энергию на ионизацию, то в потерях энергии на излучение имеется значительный разброс. Чтобы оценить последний эффект, воспользуемся кинетическим уравнением для функции распределения частиц в среде по энергиям (66.1). Это уравнение использовано Ландау для изучения разброса частиц по энергиям с учетом ионизационных потерь. Но этим уравнением, очевидно, можно воспользоваться также и для изучения разброса частиц по энергиям, связанного с излучением. Такой подход справедлив, если возможно пренебречь ролью образования электронно-позитронных пар в веществе. (Этот эффект будет рассмотрен в следующей главе.)

Подставляя в уравнение (66.1) в качестве функции  $w(\varepsilon)$  вероятность радиационных потерь энергии частицы (70.1), получим уравнение для распределения частиц по энергиям на глубине  $t$ :

$$\frac{df(E, t)}{dt} = \int_0^\infty d\omega n \frac{d\sigma_\gamma}{d\omega} [f(E - \omega, t) - f(E, t)]. \quad (70.10)$$

Рассмотрим подробнее случай полного экранирования, когда  $l_c \gg R$ . В этом случае вероятность излучения определяется только отношением  $\omega/E$ , поэтому решение уравнения (70.10) удобно искать, используя преобразование Меллина [32]. Интеграл Меллина определяется соотношением

$$M(s) = \int_0^\infty dy y^s f(y). \quad (70.11)$$

Обратное преобразование при этом имеет вид

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds y^{-(s+1)} M(s), \quad (70.12)$$

где путь интегрирования  $C$  проходит параллельно мнимой оси внутри полосы сходимости (см. [33]).

Используя формулы (70.11) и (70.4), теперь легко показать, что интеграл Меллина, соответствующий функции распределения частиц по энергиям, удовлетворяет уравнению

$$\frac{dM(s)}{dz} = -A(s)M(s), \quad (70.13)$$

где

$$A(s) = \int_0^1 dv [1 - (1-v)^s] nL_R \frac{d\sigma(v)}{dv}, \quad v = \frac{\omega}{E}, \quad t = zL_R.$$

С учетом граничного условия  $f(E, 0) = \delta(E - E_0)$ , которому соответствует интеграл Меллина  $M(s, 0) = E_0^s$ , имеем

$$M(s, z) = E_0^s \exp[-zA(s)].$$

С целью упрощения вычислений иногда используется [30] аппроксимация формулы (70.4) для вероятности излучения функцией вида

$$\frac{dw}{dv} = -[L_R(\ln 2) \ln(1-v)]^{-1}; \quad (70.14)$$

тогда

$$A(s) = \frac{\ln(1+s)}{\ln 2}.$$

Обратная формула Меллина (70.12) при этом приводит к следующему выражению для функции распределения:

$$f(E, z) = \frac{1}{2\pi i E_0} \int_C ds \frac{(E_0/E)^{s+1}}{(1+s)^{z/\ln 2}}.$$

Путь интегрирования здесь проходит параллельно мнимой оси справа от начала координат. Если замкнуть контур интегрирования полукругом бесконечного радиуса в левой части комплексной переменной  $s$  и учесть сингулярность в точке  $s = -1$ , получим

$$f(E, z) = \frac{1}{E_0} \frac{[\ln(E_0/E)]^{(z/\ln 2) - 1}}{\Gamma(z/\ln 2)}. \quad (70.15)$$

Эта формула совпадает с соответствующим результатом работ [30, 34], полученным другим путем.

Мы пользовались при получении формулы (70.15) кинетическим уравнением (66.1). Обратим внимание на то, что этим же уравнением мы пользовались для нахождения распределения частиц, теряющих энергию на ионизацию (как это впервые было сделано Ландау [14]), а также для исследования распределения частиц по энергиям при излучении во внешнем поле. Различие между этими процессами определяется только тем, что в уравнение (70.1) входят различные вероятностные функции.

### § 71. Потери энергии на излучение частицами высоких энергий в кристаллах

При движении релятивистских электронов и позитронов в кристалле под малыми углами к кристаллическим осям и плоскостям проявляются когерентные и некогерентные эффекты в излучении. По этой причине радиационные потери энергии частицы в кристалле будут складываться из потерь энергии, обусловленных когерентными и некогерентными эффектами в излучении. Определим эти потери энергии при движении частиц в кристалле в различных условиях [28].

Рассмотрим вначале случай, когда движение частицы в кристалле происходит под углами к кристаллическим осям или плоскостям, значительно превышающими критические углы осевого и плоскостного каналирования. Спектральная плотность излучения в этом случае, как показано в гл. 4, определяется формулами борновского приближения. Проинтегрировав эти формулы по частотам излученных фотонов, получим следующее выражение для радиационных потерь энергии на единице длины:

$$\frac{dE}{dt} = \Delta_n(E) + \Delta_{\text{coh}}(E), \quad (71.1)$$

где

$$\Delta_n = n \int_0^E d\omega \omega \frac{d\sigma_n}{d\omega}, \quad (71.2)$$

$$\Delta_{\text{coh}} = n \int_0^E d\omega \omega \frac{d\sigma_{\text{coh}}}{d\omega}. \quad (71.3)$$

Входящие в эти формулы сечения излучения  $d\sigma_n$  и  $d\sigma_{\text{coh}}$  определяются формулами (27.9) и (27.11).

Сечение некогерентного излучения  $d\sigma_n$ , как показано в § 27, с точностью до  $5 \div 20\%$  совпадает с сечением  $d\sigma_{\text{вн}}$  излучения

электрона в поле отдельного атома, поэтому с той же точностью можно считать, что

$$\Delta_n = n \int_0^E d\omega \omega = \frac{d\sigma_{\text{вн}}}{d\omega} = \frac{E}{L_R}. \quad (71.4)$$

Сечение же когерентного излучения  $d\sigma_{\text{coh}}$  является довольно сложной функцией энергии частицы, частоты излученного фотона и углов ориентации кристаллических осей относительно пучка. Некоторые упрощения возникают в случае, когда движение частицы происходит вблизи одной из кристаллических осей (оси  $z$ ), но вдали от плотно упакованных атомами кристаллических плоскостей, т. е. таких плоскостей, среднее расстояние между соседними атомами в которых велико по сравнению с постоянной решетки. Столкновения частицы с различными цепочками атомов, расположенными параллельно оси  $z$ , в этом случае можно считать случайными. При этом сечение  $d\sigma_{\text{coh}}$  зависит только от двух параметров — параметра  $\zeta_1 = \psi l_c / R$ , определяющего отношение длины когерентности к длине порядка  $R/\psi$ , на которой на частицу эффективно действует поле цепочки, и параметра  $\zeta_2 = \omega/E$ , учитывающего отдачу при излучении. Если при этом характерные частоты когерентного излучения  $\omega \sim 2\gamma^2 \psi / R$  малы по сравнению с  $E$ , то при вычислении величины  $\Delta_{\text{coh}}$  можно пренебречь отдачей при излучении и распространить интегрирование по  $\omega$  в (71.3) до бесконечности. В результате приходим к следующему выражению для  $\Delta_{\text{coh}}$ :

$$\Delta_{\text{coh}} = \eta \frac{E}{m^2 d} \frac{E}{L_R}, \quad (71.5)$$

где

$$\eta = \frac{4\pi}{3 \ln 183Z^{-1/3}} \left[ 1 + \left( 1 + \frac{\overline{u^2}}{R^2} \right) e^{\overline{u^2}/R^2} \text{Ei} \left( -\frac{\overline{u^2}}{R^2} \right) \right],$$

$\overline{u^2}$  — среднее значение квадрата тепловых колебаний атомов в решетке и  $\text{Ei}(x)$  — интегральная показательная функция:

$$\text{Ei}(-x) = - \int_x^\infty \frac{dt}{t} e^{-t}.$$

При  $\overline{u^2} \ll R^2$  входящий в (71.5) коэффициент  $\eta$  по порядку величины равен единице:

$$\eta \approx \frac{4\pi}{3 \ln(183Z^{-1/3})} \left[ \ln \frac{R^2}{\overline{u^2}} - 1 - G + O \left( \frac{\overline{u^2}}{R^2} \right) \right],$$

где  $G \approx 0,577$ .

Сравнивая величины  $\Delta_n$  и  $\Delta_{\text{coh}}$ , видим, что при  $E \ll m^2 d$  радиационные потери энергии электрона в кристалле обусловлены некогерентным эффектом в излучении, а при  $E \gg m^2 d$  основной вклад в потери энергии вносит слагаемое, определяющее когерентное излучение. В последнем случае средняя потеря энергии электрона в кристалле  $z\Delta_{\text{coh}}$  будет порядка энергии частицы  $E$  на глубинах  $z$ , много меньших радиационной длины. Если при этом толщина кристалла будет достаточно мала, так что  $z\Delta_n \ll E$ , то распределение электронов по энергиям с учетом флуктуаций будет определяться формулой (69.18), в которой следует положить

$$\bar{\Delta} = \Delta_{\text{coh}}(E_0), \quad \bar{\Delta}^2 = \frac{56\sqrt{\pi}}{15 \ln 183Z^{-1/3}} \frac{E_0^2}{m^2 d L_R} \frac{E_0^2 \psi}{m^2 \sqrt{u^2}}, \quad (71.6)$$

где  $E_0$  — начальная энергия электрона.

Если же  $z\Delta_{\text{coh}} \ll E$ , то в соответствии с формулами (71.5) и (69.7) среднее значение энергии электрона на глубине  $z$  будет равно

$$\bar{\varepsilon}(z) = E_0 \left( 1 + \eta \frac{E_0 z}{m^2 d L_R} \right)^{-1}. \quad (71.7)$$

Заметим, что  $\bar{\Delta}(E)$  и  $\bar{\varepsilon}(z)$  не зависят от величины угла  $\psi$  между импульсом электрона и кристаллической осью  $z$ . От  $\psi$  зависит только область применимости формул (71.4), (71.5) и (71.7): требуется, чтобы характерные частоты излучения были достаточно малы,  $\omega \sim \gamma^2 \psi / R \ll E$ . С ростом энергии частицы это условие нарушается, и необходимо учитывать эффект отдачи при излучении.

Рассмотрим еще один предельный случай формул теории когерентного излучения релятивистских электронов в кристалле, когда выражения для потерь энергии частицы существенно упрощаются. При достаточно высоких энергиях условие  $\delta R / \psi \ll 1$  может быть выполнено вплоть до значений  $\omega \sim E$ . В этом случае, как показано в § 29, сечение когерентного излучения только множителем  $A \sim R / 4\psi d$  отличается от соответствующего сечения излучения на изолированном атоме. Используя этот результат, легко проверить, что

$$\Delta_{\text{coh}} = A \frac{E}{L_R} \quad (71.8)$$

и, следовательно, при  $A \gg 1$  основные потери энергии электрона в кристалле будут определяться когерентным эффектом в излучении. Функция распределения частиц по энергиям в этом случае может быть получена из соответствующей функции распределения частиц по  $E$  в аморфной среде (70.15), если в последней заменить радиационную длину  $L_R$  на модифицированную радиационную длину  $L^* = L_R / A$ .

С уменьшением угла  $\psi$ , когда значение этого угла становится сравнимым с критическим углом осевого каналирования частиц  $\psi_c$  формулы теории когерентного излучения перестают быть справедливыми. В этом случае необходим учет влияния отклонения траектории частицы от прямолинейной на излучение. Соответствующие спектральные распределения излучения, справедливые при  $\psi \lesssim \psi_c$  были получены и проанализированы в гл. 7 и в § 62. Проинтегрировав эти спектральные распределения излучения по частотам, получим полные радиационные потери энергии частиц в кристалле при  $\psi \lesssim \psi_c$ . При этом, согласно (62.11), для надбарьерных электронов некогерентная часть потерь энергии не зависит от  $\psi$  и совпадает с соответствующим результатом теории когерентного излучения:

$$\Delta_n^- = \frac{E}{L_R}. \quad (71.9)$$

Для позитронов же зависимость  $\Delta_n^+$  от  $\psi$  определяется тем же множителем, что и зависимость от  $\psi$  величины  $\langle d\mathcal{E}/d\omega \rangle_n$ ,

$$\Delta_n^+ = \frac{e^2 n}{m^2} E^3 \int_{\rho^*}^{\infty} \rho d\rho A(\rho), \quad (71.10)$$

где  $eU_r(\rho^*) = \frac{1}{2} E\psi^2$  и  $U_r(\rho)$  — непрерывный потенциал цепочки.

Аналогичные результаты справедливы и для когерентной части потерь энергии. Так, для надбарьерных электронов при  $\omega \sim \gamma^2 \psi/R \ll E$ , согласно (49.3), величина  $\Delta_{\text{coh}}$  не зависит от  $\psi$  и определяется формулой

$$\Delta_{\text{coh}}^- \approx \eta \frac{E}{m^2 d} \frac{E}{L_R}, \quad (71.11)$$

тогда как для позитронов

$$\Delta_{\text{coh}}^+ \approx \frac{2e^2}{3m^2} n d \gamma^2 \int_{\rho^*}^{\infty} \rho d\rho \left( \frac{dU(\rho)}{d\rho} \right)^2. \quad (71.12)$$

Таким образом, при  $\psi \lesssim \psi_c$  полные радиационные потери энергии надбарьерных электронов и позитронов существенно различаются, причем потери энергии электронов оказываются большими, чем потери энергии позитронов. Связано это с тем, что при  $\psi \lesssim \psi_c$  позитроны не подходят на близкие расстояния к оси цепочки, где велики градиенты среднего поля цепочки, и, следовательно, излучение в этом случае оказывается подавленным.

Полученные выше формулы показывают, что радиационные потери энергии быстрых частиц в кристалле, вообще говоря,

зависят от величины угла  $\psi$  между импульсом частицы и кристаллографической осью. С глубиной проникновения частиц в кристалл угол  $\psi$  меняется, поэтому для нахождения полных потерь энергии в толстых кристаллах необходимо знать распределение частиц по углам  $\psi$  на глубине  $z$ . Если это распределение известно, то среднее значение потерь энергии при прохождении заданной толщины будет определяться формулой

$$\Delta E = \int_0^L dz \int d\psi f(z, \psi) \Delta(E). \quad (71.13)$$

В частности, для надбарьерных электронов, согласно (71.9) и (71.11), величина  $\Delta(E)$  от  $\psi$  не зависит (условия, при которых этот результат справедлив, отмечены выше), поэтому даже при значительном перераспределении частиц по углам потери энергии будут определяться формулой

$$\Delta E^- = L \left( \frac{E}{L_R} + \eta \frac{E}{m^2 d L_R} \right), \quad \Delta E \ll E. \quad (71.14)$$

Подчеркнем, что этот результат справедлив, если электрон на всем пути в кристалле является надбарьерным.

В случае электронов при  $\psi \lesssim \psi_c$  наряду с инфинитным возможно финитное, отвечающее каналированию, движение частицы в поле одной или нескольких цепочек атомов кристалла. Канализованные электроны чаще подходят на близкие расстояния к оси цепочки и больше времени проводят в области с большим градиентом потенциала, чем надбарьерные электроны, поэтому радиационные потери энергии канализованных электронов должны быть больше радиационных потерь энергии надбарьерных электронов. Для определения средних потерь энергии канализованных электронов существенно знать их функцию распределения по поперечным энергиям. В общем случае эта задача в настоящее время не решена\*). По этой причине этот вопрос здесь не рассматривается.

---

\*) В работах [35, 36] был рассмотрен вопрос о распределении электронов по поперечным энергиям при аксиальном каналировании на основе уравнения Фоккера—Планка в предположении, что процесс перераспределения частиц развивается адиабатически. Однако в работах [37] было показано, что условие адиабатичности развития процесса перераспределения частиц по поперечным энергиям в широком интервале энергий частиц не выполняется.



# ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЛИВНИ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

## § 72. Основные уравнения каскадной теории ливней

Если заряженная частица (для определенности будем рассматривать электрон) проходит через вещество, то она теряет свою энергию вследствие столкновений и излучения. Большая часть энергии, теряемой при столкновениях, расходуется на ионизацию и возбуждение атомов. Если энергия сравнительно невелика, то, как показано в § 70, эти потери значительно превосходят потери на излучение. Если же электрон обладает большой энергией, то в основном он теряет ее на излучение. В этом случае электрон интенсивно излучает фотоны, энергия которых сравнима с энергией электрона. При своем движении в веществе фотоны рождают электронно-позитронные пары, которые, в свою очередь, излучают фотоны, а последние снова превращаются в электронно-позитронные пары (рис. 10.1).

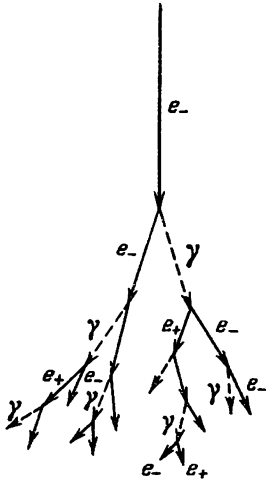


Рис. 10.1. Развитие электромагнитного каскада в веществе

Таким образом, при движении быстрого электрона в веществе происходит процесс размножения частиц — электронов, позитронов и фотонов. Этот процесс размножения носит название электромагнитного ливня. Ливень может быть создан не только электроном большой энергии, но и фотоном большой энергии. Качественное объяснение возникновения ливня было дано в работах Бабба и Гайтлера [1] и Карлсона и Оппенгеймера [2]. Количественная теория ливней была затем разработана Ландау и Румером [3], а также Таммом и Беленьким [4]. Эта теория базируется на кинетических уравнениях, которым удовлетворяют функции распределения электронов и фотонов, движущихся в веществе. Разъясним прежде всего, как выводятся эти уравнения\*).

Существенным является тот факт, что при высоких энергиях, которыми мы здесь только и будем интересоваться, электрон

\*) Мы следуем ниже работе Ландау и Румера [3] и используем изложение Росси и Грейзена [5].

излучает фотоны, летящие, в основном, в направлении его движения, а фотон рождает пару, летящую, в основном, в направлении импульса фотона. Поэтому мы можем исходить из одномерной картины ливня, и вопрос тогда заключается в выяснении того, как зависит число частиц ливня от энергии и глубины проникновения его в вещество.

Образование пар фотоном, движущимся в веществе, а также излучение жесткого фотона электроном, движущимся в веществе, представляют собой квантовоэлектродинамические эффекты, не описываемые классической механикой. Тем не менее, кинетические уравнения для частиц ливня могут быть сформулированы по образу классического уравнения Больцмана. Дело в том, что плотность частиц в ливне невелика и поэтому квантовые эффекты, связанные со статистикой электронов и фотонов, не проявляются.

Обозначим через  $\Pi(E, t)dE$  и  $\Gamma(E, t)dE$  — числа заряженных частиц (электронов и позитронов) и фотонов на глубине  $t$  от поверхности слоя вещества, обладающие энергией в интервале  $(E, E+dE)$ . Пусть, далее,  $w_\gamma(E, E')dE'$  представляет собой вероятность (отнесенную к единице длины пути) образования в веществе фотоном с энергией  $E$  электрона с энергией в интервале  $(E', E'+dE')$  (при этом рождается одновременно позитрон с энергией  $E-E'$ ), а  $w_e(E, E')dE'$  — отнесенная к единице пути вероятность излучения в веществе электроном (или позитроном) фотона с энергией в интервале  $(E', E'+dE')$ . Тогда изменение распределения заряженных частиц на единице длины за счет образования пар будет равно

$$\left[ \frac{d\Pi(E, t)}{dt} \right]_p = 2 \int_E^\infty \Gamma(u, t) w_\gamma(u, E) du.$$

Множитель 2 здесь возникает потому, что всегда рождаются две частицы — электрон и позитрон. Изменение распределения частиц на единице длины, обусловленное излучением, определяется формулой

$$\left[ \frac{d\Pi(E, t)}{dt} \right]_R = \int_E^\infty \Pi(u, t) w_e(u, u-E) du - \int_0^E \Pi(E, t) w_e(E, E-u) du,$$

где первое слагаемое определяет число частиц, которые, излучая фотоны, переходят из области энергий большей, чем  $E$ , в энергетический интервал  $(E, E+dE)$ , а второе слагаемое — число частиц, уходящих из энергетического интервала  $(E, E+dE)$  за счет излучения, в область энергий, меньших  $E$ .

Общее изменение функции распределения частиц на единице пути равно  $\left[ \frac{d\Pi}{dt} \right]_p + \left[ \frac{d\Pi}{dt} \right]_R$ . Его следует, очевидно, приравнять

производной  $d\Pi/dt$ , если процесс является стационарным:

$$\frac{d\Pi(E, t)}{dt} = 2 \int_E^{\infty} \Gamma(u, t) w_{\gamma}(u, E) du + \int_E^{\infty} \Pi(u, t) w_e(u, u-E) du - \int_0^E du \Pi(E, t) w_e(E, E-u). \quad (72.1)$$

Аналогичным образом может быть получено кинетическое уравнение для функции распределения фотонов. Изменение числа фотонов на единице длины, обусловленное излучением фотонов электронами и позитронами, равняется

$$\left[ \frac{d\Gamma(E, t)}{dt} \right]_R = \int_E^{\infty} \Pi(u, t) w_e(u, E) du,$$

а изменение числа фотонов, обусловленное превращением их в пары, равняется

$$\left[ \frac{d\Gamma(E, t)}{dt} \right]_P = - \int_0^E \Gamma(E, t) w_{\gamma}(E, u) du.$$

Приравняв сумму этих величин  $d\Gamma(E, t)/dt$ , мы получим кинетическое уравнение для функции распределения фотонов:

$$\frac{d\Gamma(E, t)}{dt} = \int_E^{\infty} \Pi(u, t) w_e(u, E) du - \int_0^E \Gamma(E, t) w_{\gamma}(E, u) du. \quad (72.2)$$

Уравнения (72.1) и (72.2) являются основными уравнениями каскадной теории. Они были получены Ландау и Румером с целью исследования протекания ливня в аморфной среде. Но, как видно из вывода, предположение об аморфности пока нигде не было использовано. Поэтому уравнения (72.1) и (72.2) являются общими и не зависят от того, в какой среде происходит развитие ливня — в аморфной, кристаллической или даже во внешнем электромагнитном поле. Различие между этими случаями будет проявляться только в конкретном виде входящих в (72.1) и (72.2) функций  $w_e$  и  $w_{\gamma}$ .

При выводе уравнений (72.1) и (72.2) мы пренебрегали изменениями функций распределения, обусловленными процессами ионизационных потерь энергии и комптон-эффектом. Учет этих процессов, однако, также возможен и был проведен в работах [4, 6—9].

В ряде случаев вероятность процесса образования электронно-позитронных пар оказывается значительно меньше вероятности излучения фотонов. Уравнения каскадной теории при

этом существенно упрощаются и переходят в соответствующие уравнения для функций распределения частиц в среде по энергиям, если частицы теряют энергию только на излучение. Действительно, если в (72.1) и (72.2) пренебречь слагаемыми, связанными с образованием электронно-позитронных пар, т. е. положить величину  $w_\gamma$  равной нулю, то эти уравнения примут вид (см. также (70.10))

$$\frac{d\Pi}{dt} = \int_E^\infty \Pi(u, t) w_e(u, u-E) du - \int_0^E \Pi(E, t) w_e(E, E-u) du, \quad (72.3a)$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_E^\infty \Pi(u, t) w_e(u, E) du. \quad (72.3б)$$

Мы видим, что в рассматриваемом случае распределение электронов по энергиям не зависит от распределения фотонов и определяется первым уравнением (72.3). Находя из него функцию  $\Pi(E, t)$ , можно, согласно уравнению (72.3б), получить распределение по энергиям фотонов  $\Gamma(E, t)$ .

### § 73. Развитие электромагнитного ливня в аморфной среде

Рассмотрим вначале развитие электромагнитного ливня в аморфной среде. Для простоты будем интересоваться случаем достаточно высоких энергий частиц, когда имеет место эффект полного экранирования потенциала атома в процессах излучения и образования пар. Тогда вероятности этих процессов определяются известными формулами Бете и Гайтлера:

$$w_e(E, E') = \frac{1}{L_R} \frac{E^2 + (E-E')^2 - \frac{2}{3}E(E-E')}{E^2 E'},$$

$$w_\gamma(E, E') = \frac{1}{L_R} \frac{E'^2 + (E-E')^2 + \frac{2}{3}E'(E-E')}{E^3}, \quad (73.1)$$

где  $L_R$  — радиационная длина  $L_R^{-1} = 4Z^2 e^6 m^{-2} n \ln(183Z^{-1/3})$ . Формулы (73.1) показывают, что при высоких энергиях вероятности  $w_e$  и  $w_\gamma$  сравнимы между собой, поэтому при изучении развития ливня в аморфной среде необходим учет процесса образования электронно-позитронных пар.

Прежде чем переходить к решению кинетических уравнений (72.1) и (72.2) дадим качественную оценку развития процесса ливня в аморфной среде [10, 11].

Формулы (73.1) показывают, что электрон с энергией  $E$  на длине в одну радиационную длину излучает фотон с энергией порядка  $\frac{1}{2}E$ , а фотон на этой же длине образует электронно-позитронную пару с энергией частиц пары порядка половины энергии фотона. Имея в виду полученные качественные оценки для числа частиц (электронов, позитронов и фотонов) на глубине  $t \gg L_R$ , примем, что на каждом шаге развития каскада вторичные частицы приобретают одинаковую энергию и что энергии ливневых частиц достаточно велики, так что можно пренебречь комптон-эффектом и потерями на столкновения.

Согласно этой модели—она не учитывает флуктуации разброса энергии—электрон с энергией  $E_0$  после прохождения слоя вещества толщиной в  $L_R$  образует электрон и фотон, причем энергии каждой из этих частиц равны  $\frac{1}{2}E_0$ . На следующей радиационной длине вторичный электрон образует две частицы: электрон и фотон, а вторичный фотон образует электронно-позитронную пару. В результате на толщине  $t=2L_R$  образуется четыре частицы, каждая из которых будет иметь энергию, равную  $\frac{1}{4}E_0$ . Аналогично на толщине  $t=3L_R$  ливень будет содержать восемь частиц: пять электронов, три позитрона и три фотона с энергией  $\frac{1}{8}E_0$  каждый. Тогда после прохождения  $(t/L_R) \gg 1$  радиационных единиц длины полное число частиц будет равно

$$N_t = 2^{(t/L_R)},$$

а энергия каждой частицы будет составлять

$$E = E_0 2^{(-t/L_R)}.$$

Таким образом, полное число частиц с энергией, большей чем  $E$ , будет возрастать экспоненциально с увеличением  $t$  вплоть до значений

$$t = t(E) = L_R \frac{\ln(E_0/E)}{\ln 2},$$

а при  $t > t(E)$  будет резко спадать до нуля. При этом число частиц в максимуме будет равно

$$N_{\max}(E) = E_0/E.$$

Нетрудно видеть, что при  $t \gg L_R$  число фотонов равно примерно трети полного числа частиц в ливне. Следовательно, максимальное число электронов и позитронов равно  $\frac{2}{3}N_{\max}(E)$ .

Приведенные оценки справедливы, если энергии ливневых частиц велики по сравнению с критической энергией  $E^*$  (см.

§ 70). При  $E < E^*$  энергия ливневых частиц (электронов и позитронов) будет уменьшаться, в основном, вследствие потерь на ионизацию и испускания мягких квантов, при этом будет образовываться лишь небольшое число пар с малой энергией. Таким образом, на толщине

$$t_m \approx L_R \ln(E/E^*)$$

образуется максимальное число ливневых частиц, равное по порядку величины

$$N_{\max} \approx E_0/E^*.$$

При  $t > t_m$  ливень полностью затухает.

Резюмируя полученные результаты, можно сделать следующие качественные выводы относительно развития электромагнитного ливня в аморфной среде.

— Число частиц на начальных стадиях развития ливня растет экспоненциально с глубиной.

— Число ливневых частиц с энергией, большей чем  $E$ , становится максимальным после прохождения толщины слоя вещества порядка  $L_R \ln(E_0/E)$ .

— Максимальное число ливневых частиц с энергией, большей чем  $E$ , пропорционально  $E_0/E$ .

— Полное число ливневых частиц примерно равно  $E_0/E^*$ .

— Развитие ливня не зависит от природы вещества, если толщина измеряется в радиационных длинах и энергии ливневых частиц велики по сравнению с критической энергией.

Эти общие выводы будут подтверждены далее точной теорией.

Подставляя вероятности (73.1) в (72.1) и (72.2), получим уравнения для функций распределения частиц в аморфной среде по энергиям на глубине  $t$ . Решения интегральных уравнений (72.1) и (72.2) должны удовлетворять определенным граничным условиям. Именно, если ливень создается одним первичным электроном с энергией  $E_0$ , то должны выполняться условия

$$P(E, 0) = \delta(E - E_0), \quad \Gamma(E, 0) = 0. \quad (73.2)$$

Если же ливень создается одним первичным фотоном с энергией  $E_0$ , то должны выполняться условия

$$P(E, 0) = 0, \quad \Gamma(E, 0) = \delta(E - E_0). \quad (73.3)$$

Вероятности  $w_e$  и  $w_\gamma$  согласно (73.1), зависят только от отношения энергий частиц ( $E'/E$ ). В этом случае, как отмечалось в § 70, для решения интегральных уравнений удобно использовать преобразования Меллина, т. е. перейти от величины  $P(E, t)$  и  $\Gamma(E, t)$  к величинам

$$P_s(t) = \int_0^\infty dE E^s P(E, t),$$

$$\Gamma_s(t) = \int_0^\infty dE E^s \Gamma(E, t),$$

где  $s$  — комплексное число. Ясно, что если этот интеграл расходится на нижнем пределе при определенном значении  $s$ , равном  $s_a$ , то он будет расходиться и при всех значениях  $s$ , для которых  $\text{Re } s < \text{Re } s_a$ . Далее, если интеграл расходится на верхнем пределе при  $s = s_b$ , то он будет расходиться и при всех значениях  $s$ , для которых  $\text{Re } s > \text{Re } s_b$ . Поэтому, если интеграл Меллина где-нибудь сходится, то область его сходимости представляет собой полосу, ограниченную двумя прямыми, параллельными мнимой оси.

Преобразование Меллина может быть обращено. Именно, если

$$f_s = \int_0^{\infty} dE E^s f(E),$$

то

$$f(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_c ds E^{-(s+1)} f_s,$$

где контур интегрирования  $c$  представляет собой прямую, параллельную мнимой оси и расположенную внутри полосы сходимости.

Легко показать, что, выполнив преобразования Меллина над уравнениями (72.1) и (72.2), мы придем, используя формулы (73.1), к следующим уравнениям для  $\Pi_s(t)$  и  $\Gamma_s(t)$ :

$$\begin{aligned} L_R \frac{d\Pi_s(t)}{dt} &= -A(s)\Pi_s(t) + B_s\Gamma_s(t), \\ L_R \frac{d\Gamma_s(t)}{dt} &= C(s)\Pi_s(t) - D\Gamma_s(t), \end{aligned} \quad (73.4)$$

где  $A(s)$ ,  $B(s)$ ,  $C(s)$  и  $D$  определяются формулами

$$\begin{aligned} A(s) &= \frac{4}{3} \left[ \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} + G \right] - \frac{s(5s+7)}{6(s+1)(s+2)}, \\ B(s) &= \frac{2}{1+s} - \frac{8}{3(2+s)} + \frac{8}{3(3+s)}, \\ C(s) &= \frac{4}{3s} - \frac{4}{3(s+1)} - \frac{1}{s+2}, \quad D = \frac{7}{9}, \end{aligned}$$

$G = 0,577$  — постоянная Эйлера,  $\Gamma(s)$  — гамма-функция.

Если ливень создается одним первичным электроном с энергией  $E_0$ , то

$$\Pi_s(0) = E_0^s, \quad \Gamma_s(0) = 0,$$

если же ливень создается одним первичным фотоном с энергией  $E_0$ , то

$$\Pi_s(0) = 0, \quad \Gamma_s(0) = E_0^s.$$

Решая уравнения (73.4) с учетом этих граничных условий, легко найти компоненты Меллина  $\Pi_s(t)$  и  $\Gamma_s(t)$ . Например, в случае первичного электрона с энергией  $E_0$  они равны

$$\Pi_s(t) = \frac{E_0^s}{\lambda_+(s) - \lambda_-(s)} [(D + \lambda_+(s)) e^{\lambda_+(s)\tau} - (D + \lambda_-(s)) e^{\lambda_-(s)\tau}],$$

$$\Gamma_s(t) = \frac{C(s) E_0^s}{\lambda_+(s) - \lambda_-(s)} [e^{\lambda_+(s)\tau} - e^{\lambda_-(s)\tau}],$$

где  $\tau = t/L_R$ ,

$$\lambda_{\pm} = -\frac{1}{2}(A(s) + D) \pm \sqrt{(A(s) - D)^2 + 4B(s)C(s)}.$$

Эти функции при произвольном значении  $t$  регулярны при  $s > 0$  и обращаются в бесконечность при  $s = 0$ . Таким образом, положительная полуплоскость представляет собой область сходимости для  $\Pi_s(t)$  и  $\Gamma_s(t)$ .

Зная компоненты Меллина  $\Pi_s(t)$  и  $\Gamma_s(t)$ , можно, в принципе, найти распределения электронов и фотонов с помощью формул обращения:

$$\Pi(E, t) dE = \frac{dE}{2\pi i} \int_{-i\infty + \sigma}^{+i\infty + \sigma} ds E^{-(s+1)} \Pi_s(t),$$

$$\Gamma(E, t) dE = \frac{dE}{2\pi i} \int_{-i\infty + \sigma}^{+i\infty + \sigma} ds E^{-(s+1)} \Gamma_s(t),$$

где  $\sigma > 0$ , т. е. путь интегрирования представляет собой прямую, параллельную мнимой оси, лежащую в положительной полуплоскости. Вводя вместо  $E$  новую переменную  $y = \ln(E_0/E)$ , перепишем эти формулы в виде

$$\Pi(E, t) dE = -\frac{dy}{2\pi i} \int_{-i\infty + \sigma}^{+i\infty + \sigma} ds \{H_+(s) e^{ys + \lambda_+ \tau} + H_-(s) e^{ys + \lambda_- \tau}\},$$

$$\Gamma(E, t) dE = -\frac{dy}{2\pi i} \int_{-i\infty + \sigma}^{+i\infty + \sigma} ds L(s) \{e^{ys + \tau \lambda_+ - \frac{1}{2} \ln s} - e^{ys + \tau \lambda_- - \frac{1}{2} \ln s}\},$$

где

$$H_+ = \frac{D + \lambda_+}{\lambda_+ - \lambda_-}, \quad H_- = -\frac{D + \lambda_-}{\lambda_+ - \lambda_-}, \quad L = \frac{\sqrt{s} C(s)}{\lambda_+ - \lambda_-}.$$

Подынтегральные выражения в этих формулах представляют собой произведения медленно меняющихся функций



$H_+(s)$ ,  $H_-(s)$ ,  $L(s)$  и быстроменяющихся экспоненциальных функций вида  $\exp(ys + \tau\lambda(s) - n \ln s)$ , где  $n=0, 1/2$ . Поэтому для вычисления интегралов можно использовать метод перевала. Точка перевала  $s=s^*$  находится при этом из уравнения

$$y + \lambda'(s^*)\tau - \frac{n}{s^*} = 0,$$

а выражение в экспоненте раскладывается в ряд по степеням  $s-s^*$ , в котором отбрасываются члены выше второго порядка:

$$ys + \lambda(s)\tau - n \ln s \approx ys^* + \lambda(s^*)\tau - n \ln s^* + \left(\lambda''(s^*)\tau + \frac{n}{s^{*2}}\right) \frac{(s-s^*)^2}{2}.$$

Вынося функции  $H_+(s)$ ,  $H_-(s)$ ,  $L(s)$  за знак интеграла и беря их в точке  $s=s^*$ , получим окончательно следующее выражение для функции распределения электронов:

$$\Pi(E, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{H_+(s)}{\sqrt{\lambda''_+(s)\tau}} \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{1}{E} e^{\lambda_+(s)\tau}, \quad (73.5)$$

где  $s$  — связано с  $E$  и  $\tau = t/L_R$  соотношением

$$\tau = -\frac{1}{\lambda'_+(s)} \ln \frac{E_0}{E}. \quad (73.5a)$$

(В этом выражении опущено слагаемое  $\sim \exp(\lambda_-\tau)$ , так как  $\lambda_- < 0$  и  $|\lambda_+| < |\lambda_-|$ .)

Аналогичным образом находится  $\Gamma(E, t)$ :

$$\Gamma(E, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{L(s)}{\sqrt{\lambda''_+(s)\tau + 1/2s^2}} \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{1}{E} e^{\lambda_+(s)\tau}, \quad (73.6)$$

где  $s$  — определяется из уравнения

$$\tau = -\frac{1}{\lambda'_+(s)} \left( \ln \frac{E_0}{E} - \frac{1}{2s} \right). \quad (73.6a)$$

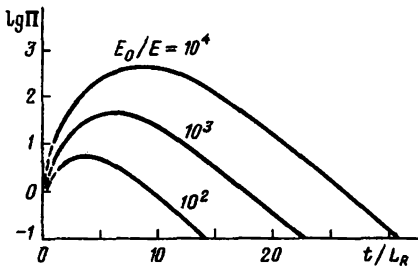


Рис. 10.2. Число электронов и позитронов с энергией, большей чем  $E$ , в ливне, образованном электроном с энергией  $E_0$ , как функция толщины мишени

На рис. 10.2 представлены результаты численного расчета зависимости функции

$$\Pi(t) = \int_E^\infty dE' \Pi(E', t)$$

от толщины мишени  $t$  при различных значениях  $E_0/E$ . Приведенные кривые показывают, что число частиц в ливне, энергии которых превышают  $E$ , сначала возрастает с увеличением  $t$ , достигает максимальной величины, а затем убывает.

Определим положение максимумов функций  $\Pi$  и  $\Gamma$  и значения этих функций в максимумах. С этой целью заметим, что зависимость этих функций от  $t$  определяется, в основном, множителем

$$\exp(\lambda_+(s)\tau + sy - n \ln s).$$

Тогда «оптимальная толщина», т. е. толщина, на которой функции  $\Pi$  и  $\Gamma$  достигают максимума, будет определяться уравнением

$$\lambda_+(s) + \left( \lambda'_+(s) T + y - \frac{n}{s} \right) \frac{ds}{dT} = 0.$$

Учитывая уравнения (73.5a) и (73.6a), находим, что  $\lambda_1(s) = 0$  или  $s = 1$ . Таким образом, оптимальная толщина равна

$$T = -\frac{y-n}{\lambda'_+(1)} = 1,01 \left( \ln \frac{E_0}{E} - n \right).$$

При этом значение функции  $\Pi$  в максимуме равно

$$\Pi_{\max} = \frac{l}{\sqrt{\ln E_0/E - m}} \frac{E_0}{E}.$$

Здесь  $l = 0,137$ ,  $m = 0,37$ , и  $n = 1$  — для электронов и  $l = 0,137$ ,  $m = 0,18$  и  $n = 0,5$  — для фотонов.

Приведенные формулы показывают, что оптимальная толщина возрастает логарифмически с отношением  $E_0/E$ , а полное число электронов в максимуме с энергией, большей  $E$ , пропорционально этому отношению.

Изложенная теория справедлива только в области очень высоких энергий частиц. А именно, требуется, чтобы выполнялось условие  $E > E^*$ , где  $E^*$  — значение энергии, при котором радиационные потери энергии становятся сравнимы с ионизационными потерями (см. § 70). По мере продвижения ливня в глубь вещества энергия частиц уменьшается, и при  $E \lesssim E^*$  теория становится неприменимой, так как этой области энергий необходим учет процесса ионизации атомов, а также комптон-эффекта.

Отметим также, что приближения, сделанные выше при решении уравнений (72.1) и (72.2), справедливы, если толщина мишени превышает радиационную длину. Для малых толщин ( $t \lesssim L_R$ ) решение уравнений (72.1) и (72.2) можно искать в виде рядов Тейлора по степеням  $t$  [11].

## § 74. Развитие электромагнитного ливня в кристалле

При движении высокоэнергетической частицы в кристалле под малым углом к одной из кристаллических осей или плоскостей, как показано в гл. 4, проявляются когерентные и интерференционные эффекты в излучении и образовании

пар. Благодаря этим эффектам вероятности процессов излучения и образования пар в кристаллах могут значительно превышать соответствующие вероятности для аморфной среды. Ясно, что когерентные и интерференционные эффекты должны проявляться и при развитии ливня в кристаллах, причем благодаря им ливень в кристалле должен развиваться на меньшей длине, чем в аморфной среде.

Первая попытка изучить развитие электромагнитных ливней в кристаллических средах была предпринята в работах [12, 13] в связи с обнаружением в космических лучах нескольких событий с аномально большим числом частиц (электронно-позитронных пар) на радиационной длине [14—17] (так называемые аномальные ливни Шайна). А именно, предполагалось, что эти события обусловлены тем, что ливень развивается в поликристалле, а не в аморфной среде. При этом, однако, были исследованы далеко не все возможности, а рассмотренные случаи, по существу, приводили к таким же результатам для протекания ливня в поликристалле, что и в аморфной среде.

В работе [18] была высказана мысль о связи аномальных ливней Шайна с явлением излучения электронов и позитронов в поликристалле при каналировании и обращено внимание на то, что в этих условиях ливень в кристалле может развиваться на меньшей длине, чем в аморфной среде.

При исследовании пространственного распределения ионизации в каскадах, образованных мюонами высоких энергий в свинце, были обнаружены так называемые «короткие» каскады — каскады, в которых поглощение частиц происходило более быстро, чем в обычных электромагнитных каскадах [19]. При выяснении причин, приводящих к этим каскадам, было обращено внимание на то, что в эксперименте ливень развивается не в аморфной среде, а в поликристалле [20].

Некоторые различия в протекании ливня в аморфной среде и в монокристалле отмечались в эксперименте [21].

В работах [22, 23] была предложена теория электромагнитных ливней в кристаллических средах, в которой учитываются когерентные эффекты во взаимодействии частиц с атомами кристаллической решетки. В этих работах были введены уравнения каскадной теории, описывающие развитие ливня в кристалле, и получены решения этих уравнений в некоторых простейших случаях. В частности, показано, что благодаря когерентным эффектам в излучении и в образовании электронно-позитронных пар ливень в кристалле может развиваться на длине, которая на один-два порядка меньше радиационной длины, и что при прохождении быстрых частиц через кристалл могут развиваться специфические фотонные ливни, состоящие из большого числа фотонов, образованных движущейся частицей. В [23] также показано, что при развитии ливня в поликристалле когерентные эффекты возможны только

в случае, когда размеры зерен поликристалла достаточно велики: а именно, необходимо, чтобы ливень успел развиваться в пределах отдельных зерен поликристалла. Некоторые другие решения уравнений каскадной теории, описывающие развитие электромагнитного ливня в ориентированном по пучку кристалле, были даны в работах [24—27].

Переходя к изложению теории электромагнитного ливня в кристаллических средах, рассмотрим вначале случай, когда движение частиц в кристалле происходит под углами, превосходящими критические углы осевого и плоскостного каналирования, и кроме того, выполняется условие  $\vartheta_1 \ll m/E$ , где  $\vartheta_1$ —угол рассеяния в пределах длины когерентности. Сечение излучения электрона в кристалле в этом случае определяется следующей общей формулой (см. (27.9)):

$$d\sigma = d\sigma_{\text{coh}} + d\sigma_n, \quad (74.1)$$

где  $d\sigma_{\text{coh}}$ —когерентная и  $d\sigma_n$ —некогерентная части сечения излучения, определяемые формулами (29.3) и (27.10). Аналогичная формула справедлива и для сечения образования электронно-позитронных пар фотоном в кристалле,

$$d\sigma^\pm = d\sigma_{\text{coh}}^\pm + d\sigma_n^\pm, \quad (74.2)$$

где  $d\sigma_{\text{coh}}^\pm$  и  $d\sigma_n^\pm$ —определяются формулами (34.4) и (34.3).

Домножив (74.1) и (74.2) на плотность атомов в среде, получим выражения для вероятностей процессов излучения и образования пар, отнесенные к единице длины,

$$w_e = n \frac{d\sigma}{d\omega}, \quad w_\gamma = n \frac{d\sigma^\pm}{dE_+}. \quad (74.3)$$

Подставляя эти выражения в (72.1) и (72.2), получим уравнения, определяющие развитие ливня в кристалле. Полученные таким образом уравнения являются очень сложными, и их решение в общем виде может быть найдено только с помощью ЭВМ. Связано это с тем, что функции (74.3) являются в общем случае осциллирующими функциями энергий частиц и ориентаций кристаллических осей относительно пучка. Кроме того, эти функции зависят не только от отношения энергий частиц, как это имело место в аморфной среде, но и от соотношений между длинами когерентности процессов излучения и образования пар и величинами  $R/\psi$  и  $a/\psi$ , где  $R$ —радиус экранирования атома,  $a$ —постоянная решетки и  $\psi$ —угол между импульсом частицы и кристаллической осью ( $\psi \ll R/a$ ).

Нас в дальнейшем будет интересовать главным образом вопрос о том, как проявляются когерентные эффекты при развитии ливня в кристалле, поэтому мы рассмотрим развитие ливня в кристалле только в некоторых предельных случаях. Особенно прост случай, когда частицы движутся под малым углом  $\psi$  к одной из кристаллических осей, но вдали от

плотно упакованных атомами кристаллографических плоскостей. Вероятности процессов когерентного излучения и образования пар в этом случае являются плавными функциями энергий частиц и ориентаций кристаллических осей относительно пучка и определяются простыми формулами (29.5) и (34.8). Рассмотрим этот случай подробнее. Заметим предварительно, что некогерентные части сечений излучения  $d\sigma_n$  и образования пар  $d\sigma_n^\pm$  слабо (на 5÷20% в зависимости от температуры кристалла — см. § 27) отличаются от соответствующих выражений для аморфной среды. Поэтому в дальнейшем мы будем полагать эти величины равными сечениям излучения и образования пар на изолированном атоме:

$$d\sigma_n \approx d\sigma_{\text{ВН}}, \quad d\sigma_n^\pm \approx d\sigma_{\text{ВН}}^\pm.$$

Когерентные части сечений излучения и образования пар в рассматриваемом случае, согласно (23.5) и (34.8), определяются параметрами  $\omega/E$ ,  $(\psi l_c/R)$  и  $(\psi l_\pm/R)$ . На рис. 10.3

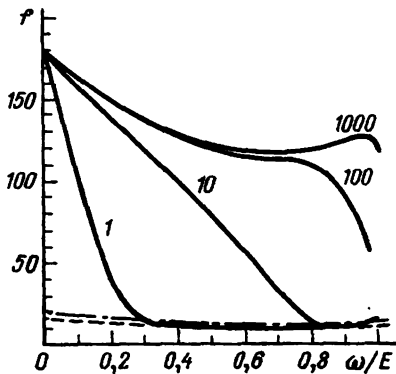


Рис. 10.3. Сечение излучения электроном фотона в кристалле вольфрама при заданном значении угла  $\psi = 10^{-3}$  рад ориентации кристаллической оси  $\langle 111 \rangle$  относительно пучка и различных значениях энергии частиц (приведены в ГэВ у кривых). Функция  $f$  связана с сечением излучения (74.1) соотношением

$$f = \omega \frac{d\sigma}{d\omega} \frac{m^2}{Z^2 e^6}$$

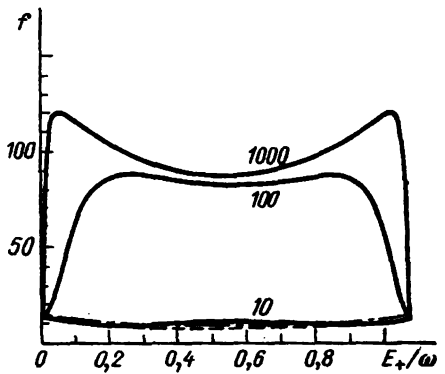


Рис. 10.4. Сечение образования электронно-позитронной пары фотоном в кристалле вольфрама при заданном значении угла  $\psi = 10^{-3}$  рад между импульсом фотона и осью  $\langle 111 \rangle$  и различных значениях энергии фотонов (приведены в ГэВ у кривых). Функция  $f$  связана с сечением образования пары соотношением

$$f = \omega \frac{d\sigma}{dE_+} \frac{m^2}{Z^2 e^6}$$

представлены графики функции  $\omega d\sigma/d\omega$ , определяемой по формуле (74.1), при различных энергиях падающей частицы. Соответствующие графики для сечения образования пар  $d\sigma^\pm/dE_+$  представлены на рис. 10.4. Штриховые линии — некогерентная часть сечения, штрихпунктирная — сечение Бете — Гайтлера.

Приведенные графики показывают, что в широком интервале энергий дифференциальные сечения излучения и об-

разования электронно-позитронных пар в кристалле существенно превосходят соответствующие величины для аморфной среды. По этой причине ливень в кристалле должен развиваться быстрее, чем в аморфной среде.

Полученные результаты также показывают, что если выполняется условие  $l \gg R/\psi$  вплоть до значений  $\omega \sim E$ , то вероятности излучения и образования пар в кристалле только множителем  $A \sim R/4\psi d$  отличаются от соответствующих вероятностей излучения и образования пар в аморфной среде,

$$w \approx Aw_{\text{ВН}}, \quad w^{\pm} \approx Aw_{\text{ВН}}. \quad (74.4)$$

Если  $\overline{u^2} = 0$ , то, согласно (29.6),  $A = \pi R/\psi d \cdot 2 \ln(183Z^{-1/3})$ .

Соответствующие ливневые функции для кристалла в этом случае могут быть получены непосредственно из ливневых функций, относящихся к аморфной среде, если в последних радиационную длину  $L_R$  заменить на модифицированную радиационную длину

$$L^* = \frac{1}{A} L_R. \quad (74.5)$$

При этом ливень в кристалле будет развиваться на длине, в  $A$  раз меньшей, чем в аморфной среде. Подчеркнем, что такая ситуация имеет место только в том случае, когда длины когерентности процессов излучения  $l = 2E(E - \omega)/m^2\omega$  и образования пар  $l_{\pm} = 2E_{\pm}E_{\mp}/m^2\omega$  достаточно велики:  $l \gg R/\psi$  и  $l_{\pm} \gg l/\psi$ . При этом величина  $A$  имеет простой физический смысл — она определяет по порядку величины число атомов отдельной цепочки атомов кристалла, находящихся на длине когерентности.

Приведенные формулы справедливы, если угол  $\psi$  между направлением движения электрона и кристаллической осью мало меняется при развитии ливня. Изменение угла  $\psi$  обусловливается двумя факторами — излучением фотона (при этом изменение угла  $\psi$  по порядку величины равно  $m/E$ ) и многократным рассеянием электрона на тепловых колебаниях атомов решетки: при этом изменение угла  $\psi$  будет порядка

$$\Delta\psi \sim \frac{E_s}{E} \sqrt{\frac{t}{L_R}}.$$

Поэтому для справедливости полученных результатов необходимо выполнение условий

$$\psi^2 \gg \max \left( \frac{E_s^2 t}{E^2 L_R}, \frac{m^2}{E^2} \right).$$

Если эти условия не выполняются, то при изучении развития ливня в кристалле требуется учитывать перераспределение частиц по углам.

## § 75. Фотонный ливень

Мы рассмотрели развитие ливня в кристалле в условиях, когда когерентные эффекты имеют место как при излучении, так и при образовании электронно-позитронных пар. Эти эффекты проявляются, если длины когерентности процессов излучения  $l$  и образования пар  $l_{\pm}$  превосходят постоянную решетки  $a$ . Существует, однако, широкая область энергий частиц, в которой когерентные эффекты будут проявляться только при излучении, но не при образовании пары. Такая ситуация имеет место, если энергии фотонов, участвующих в ливне, сравнительно малы. А именно, требуется, чтобы выполнялось условие  $\omega \lesssim m^2 a$ . Это условие означает, что длина когерентности процесса образования пары мала по сравнению с постоянной решетки. При этом длина когерентности процесса излучения может быть большой по сравнению с  $a$ .

Действительно, при не очень высоких энергиях фотонов, когда выполняется условие  $l_{\pm} < R/\psi$ , вероятность образования в кристалле электронно-позитронной пары быстро уменьшается с уменьшением энергии фотона (см. рис. 10.4). При этом если толщина мишени  $L$  будет мала по сравнению с радиационной длиной  $L_R$ , то вероятность каскадного размножения в кристалле электронно-позитронных пар будет мала. Что же касается процесса излучения, то в рассматриваемом случае возможно множественное рождение фотонов. Связано это с тем, что условие  $l \gtrsim R/\psi$ , при котором проявляются когерентные эффекты в излучении, может выполняться при существенно более низких энергиях частиц  $E$ , чем энергии, при которых имеют место когерентные эффекты в образовании пар.

Таким образом, при развитии ливня в кристалле могут быть выполнены условия, при которых вероятность образования пары много меньше вероятности излучения фотона. В этих условиях в кристалле развивается фотонный ливень [22, 23]. Это означает, что при прохождении через кристалл, толщина которого меньше радиационной длины, электрон может излучить большое число фотонов, которые не успеют при своем движении в кристалле образовать электронно-позитронные пары. Рассмотрим подробнее развитие фотонного ливня в кристалле. Начнем со случая, когда фотонный ливень развивается при движении частицы под малым углом  $\psi$  к одной из кристаллографических осей.

Если  $l_{\pm} < 0$ , то в уравнениях (72.1) и (72.2) можно с хорошей точностью считать, что вероятность образования пары равна вероятности образования пары в аморфной среде, т. е. что она определяется формулой Бете—Гайтлера,  $w_{\gamma} \approx w_{\text{вн}}$ , где  $w_{\text{вн}}^{\pm} = nd\sigma_{\text{вн}}^{\pm}/dE_{\pm}$ . Что касается процесса излучения, то в рассматриваемом случае требуется учитывать в сечении как слагаемое, описывающее когерентные эффекты при излучении, так и слагаемое, описывающее некогерентные эффекты. Послед-

нее слагаемое, как уже отмечалось, с хорошей точностью может быть заменено сечением излучения электрона на изолированном атоме. При этом входящая в (72.1) величина  $w_e(E, \omega)$  приобретает вид

$$w(E, \omega) = w_{\text{BH}}(E, \omega) + w_{\text{coh}}(E, \omega), \quad (75.1)$$

где  $w_{\text{BH}} = n d \sigma_{\text{BH}} / d\omega$  и  $w_{\text{coh}} = n d \sigma_{\text{coh}} / d\omega$ .

Приведенные выше величины  $w_\gamma$  и  $w_e$  должны быть подставлены в уравнения (72.1) и (72.2), определяющие развитие ливня в веществе. Мы будем далее предполагать, что выполняются условия

$$m^2 d \ll E \ll m^2 R / \psi, \quad \psi \ll R / d$$

и что толщина мишени мала ( $L \ll L_R$ ). При этом можно пренебречь образованием электронно-позитронных пар и некогерентным излучением фотонов, т. е. развитие ливня в кристалле будет определяться только одной функцией  $w_{\text{coh}}$ . В этом случае задача нахождения каскадных функций частиц в кристалле сводится к задаче нахождения каскадных функций при наличии внешнего поля, причем роль внешнего поля выполняет среднее поле кристаллических осей. При этом функция распределения электронов (или позитронов) по энергиям будет определяться уравнением (72.3а). Решение последнего уравнения в случае надбарьерных частиц было получено и проанализировано в § 72 при изучении потерь энергии быстрых частиц в кристалле. В частности, если пренебречь флуктуациями потерь энергии, то согласно (69.7) распределение электронов по энергиям будет иметь вид

$$\Pi(E, t) = \delta(E - \bar{\epsilon}(t)), \quad \bar{\epsilon}(t) = \frac{E_0}{1 + \eta E_0 t / m^2 L_R d}. \quad (75.2)$$

Подставляя это распределение в (72.3б), получим следующее уравнение для определения функции распределения фотонов по энергиям:

$$\frac{d\Gamma(\omega, t)}{dt} = w_{\text{coh}}(\bar{\epsilon}(t), \omega). \quad (75.3)$$

Когерентные эффекты проявляются не только при движении частицы вблизи кристаллографической оси, но и при движении вблизи кристаллографической плоскости. Качественная картина в развитии ливня в этом случае будет такая же, как и при движении вблизи кристаллографической оси. Поэтому мы не будем здесь подробно изучать развитие ливня при движении частиц вблизи кристаллографической плоскости. Ограничимся только рассмотрением того случая, когда область энергий частиц такова, что можно пренебречь эффектом образования электронно-позитронных пар, т. е. случая, когда задача нахождения каскадных функций в кристалле сводится к задаче



нахождения каскадных функций при движении частиц во внешнем поле (в данном случае речь идет о поле, создаваемом непрерывным потенциалом кристаллических плоскостей). Этот случай представляет интерес еще и потому, что на нем для позитронов можно четко проследить роль эффекта каналирования в развитии ливня в кристалле.

Если в пределах длины когерентности  $l$  находится большое число атомов кристаллической плоскости, вблизи которой происходит движение и достаточно мал угол  $\theta$  между плоскостью и падающим пучком, то, как показано в гл. 6, для описания движения и излучения частицы в кристалле можно пользоваться приближением непрерывной плоскости — потенциалом кристалла, усредненным по координатам данной плоскости. При этом, если отсутствует явление плоскостного каналирования, т. е. если  $\theta \gg \theta_c$ , то интенсивность когерентного излучения определяется формулой (43.7). Домножив эту формулу на  $L^{-1}$  и проинтегрировав по частотам, получим потерю энергии частицей на единице пути, обусловленную когерентным эффектом при излучении:

$$\Delta_{\text{coh}} = \eta_p \frac{nR^2 E}{m^2} \frac{E}{L_R}, \quad \eta_p = \frac{32\pi^2}{9 \ln(183Z^{-1/3})}. \quad (75.4)$$

Сравнивая это выражение для  $\bar{\Delta}_{\text{coh}}$  с величиной  $\bar{\Delta}_n$ , находим, что при  $10nR^2 E m^{-2} \gg 1$  основные потери энергии электрона будут обусловлены когерентными процессами при излучении. В этом случае распределение электронов по энергиям на глубине  $t$  будет определяться формулами § 69, в которых следует положить

$$\bar{\Delta} = \bar{\Delta}_{\text{coh}}, \quad \bar{\varepsilon}(t) = \frac{E_0}{1 + \eta_p nR^2 E_0 t / m^2 L_R}. \quad (75.5)$$

Подставляя найденную указанным выше способом функцию распределения электронов в кристалле по  $E$  в (72.36), можно получить распределение фотонов по частотам  $\omega$  на глубине  $t$ .

Важной величиной, характеризующей процесс излучения электронов в кристалле, является полное число фотонов, излученных электроном (или позитроном) на глубине  $t$ . Оценим длину, на которой число излученных фотонов  $\Gamma$  в интервале частот  $\Omega \leq \omega \leq E_0$ ,  $\Omega \ll E_0$ , превысит единицу. Величина  $\Gamma$  может быть представлена в виде

$$\Gamma = \Gamma_{\text{coh}} + \Gamma_n, \quad (75.6)$$

где  $\Gamma_{\text{coh}}$  и  $\Gamma_n$  — числа фотонов, образованных за счет когерентных и некогерентных процессов при излучении. Если  $t \ll L_R$ , то согласно (73.1)

$$\Gamma_n = t \int_{\Omega}^E d\omega w_{\text{ВН}}(E_0, \omega) = \frac{t}{L_R} \left( \frac{4}{3} \ln \frac{E_0}{\Omega} + \frac{1}{6} \right). \quad (75.7)$$

При этом согласно (43.7) полное число фотонов, излученных когерентно при движении вблизи кристаллической плоскости, определяется следующим выражением:

$$\Gamma_{\text{coh}} = t \int_{\Omega}^{E_0} d\omega w_{\text{coh}}(E_0, \omega) = t \frac{32e^2 U_p^2}{3\pi^3 m^2 \theta d}. \quad (75.8)$$

Сравнивая  $\Gamma_n$  и  $\Gamma_{\text{coh}}$ , приходим к выводу, что в кристалле за счет когерентных процессов излучение более чем одного фотона происходит на глубине  $t$ , значительно меньшей радиационной длины  $L_R$ . А именно,  $\Gamma \sim 1$  при  $t \sim (\theta d^2/R^2)L_R$ . Таким образом, мы видим, что даже в достаточно тонких кристаллах ( $t \ll L_R$ ) может развиться фотонный ливень.

Полученные выше результаты относятся к случаю, когда отсутствует явление каналирования частиц в кристалле. Остановимся теперь кратко на выяснении роли эффекта каналирования частиц в развитии электромагнитного ливня. Отметим прежде всего, что при каналировании положительно заряженные частицы не подходят на близкие расстояния к ядрам атомов решетки, поэтому для каналированных позитронов слагаемое с  $d\sigma_n$  в сечениях излучения и образования пар будут малы по сравнению с сечениями излучения и образования пар на изолированном атоме. В результате оказывается, что при каналировании позитронов усиливается роль когерентных эффектов в развитии ливня.

Для каналированных позитронов, движущихся вдоль кристаллических плоскостей, имеющих параболическое распределение межплоскостного потенциала (44.1), в дипольном приближении, согласно (44.3),

$$w_{\text{coh}} = \frac{4e^2 U_p^2}{3m^2 \theta_c d} \frac{1}{\omega} \zeta [1 - 2\zeta(1 - \zeta)] \Theta(1 - \zeta),$$

где  $\zeta = \delta d/2\theta_c$ . Подставляя это выражение в (72.3), получим уравнения, описывающие развитие ливня фотонов каналированными позитронами в пренебрежении процессом образования электронно-позитронных пар. При этом для каналированных позитронов

$$\bar{\Delta} = 8\eta_p \frac{nR^2 E}{m^2} \frac{E}{L_R}, \quad \bar{\Delta}^2 = \frac{7}{10} \frac{E^2 \theta_c}{m^2 d} \bar{\Delta}(E), \quad (75.9)$$

$$\bar{\epsilon}(t) = \frac{E_0}{1 + 8\eta_p nR^2 E_0 t/m^2 L_R}.$$

Полное число фотонов, излученных каналированными позитронами на малых глубинах, определяется соотношением

$$\Gamma \approx t \frac{8e^2 U_p^2}{9m^2 \theta_c d}.$$

Из этого соотношения находим, что  $\Gamma \approx 1$  при

$$t \sim \theta_c d^2 R^{-2} L_R \ll L_R.$$

## § 76. Влияние фотонного ливня на образование в кристалле электронно-позитронной пары

В предыдущем параграфе было показано, что при развитии ливня в кристалле могут быть выполнены условия, при которых вероятность образования электронно-позитронных пар много меньше вероятности излучения фотона. В этих условиях в кристалле развивается фотонный ливень, инициатором которого является электрон. Пусть теперь на кристалл падает жесткий фотон, создающий в кристалле электронно-позитронную пару. Частицы пары в свою очередь могут создать фотонный ливень низкоэнергетических фотонов. При этом возникает вопрос, как влияет фотонный ливень на вероятность образования в кристалле электронно-позитронной пары жестким фотоном. С этой целью рассмотрим образование электронно-позитронной пары в кристалле, толщина которого меньше радиационной длины [26, 27], причем будем считать, что энергия фотона, создающего пару, не очень велика, так что длина когерентности процесса образования пары  $l_{\pm} = 2E_{\pm} E_{\mp} / m^2 \omega$  мала по сравнению с величиной  $R/\psi$ . Пара в этом случае будет образовываться только на первом шаге развития ливня. Что касается процесса излучения, то в рассматриваемом случае возможно множественное рождение фотонов. Связано это с тем, что условие  $l_c = 2E(E - \omega) / m^2 \omega \geq R/\psi$ , при котором проявляются когерентные эффекты в излучении, может выполняться при существенно более низких энергиях частиц  $E$ , чем энергии, при которых имеют место когерентные эффекты в образовании пар.

Предположим, что образование пары происходит только на первом шаге развития ливня, а в дальнейшем возможно множественное рождение фотонов (рис. 10.5, а). Тогда уравнение

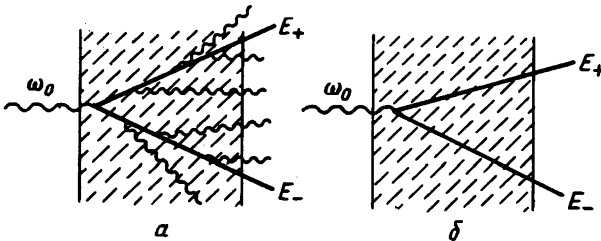


Рис. 10.5. Образование электронно-позитронной пары фотоном с учетом (а) и без учета (б) последующего излучения частицами пары фотонов

(72.1), описывающее распределение электронно-позитронных пар по энергиям, можно записать в виде

$$\frac{d\Pi}{dt} = 2w_{\gamma}(\omega_0, E) + \int_0^{\infty} d\omega [\Pi(E + \omega)w_e(E + \omega, \omega) - \Pi(E)w_e(E, \omega)], \quad (76.1)$$

где  $\Pi(E, t)$  — число электронов и позитронов с энергией  $E$  на глубине  $t$  проникновения частиц в кристалл и  $\omega_0$  — энергия падающего на кристалл фотона.

Если характерные значения энергии ливневых фотонов  $\omega$  малы по сравнению с энергией частицы  $E$ , то в (76.1) может быть выполнено разложение по этим частотам. В первом приближении такого разложения мы приходим к уравнению

$$\frac{d\Pi}{dt} = 2w_\gamma(\omega_0, E) + \frac{\partial}{\partial E} [\bar{\Delta}(E) \Pi(E)]. \quad (76.2)$$

Здесь  $\bar{\Delta}(E)$  — среднее значение потерь энергии частицей с энергией  $E$  на излучение на единице пути.

Решение уравнения (76.2) имеет следующий вид:

$$\Pi(E, t) = \frac{1}{\bar{\Delta}(E)} \int_E^{\omega_0} du 2w_\gamma(\omega_0, u) \Theta \left( t - \int_E^u \frac{dx}{\bar{\Delta}(x)} \right), \quad (76.3)$$

где  $\Theta(x)$  — ступенчатая функция Хевисайда.

Заметим, что если фотонный ливень при образовании пары не учитывать (см. рис. 10.5, б), т. е. величину  $\bar{\Delta}(x)$  в (76.3) положить равной нулю, то

$$\Pi(E, t) = 2tw_\gamma(\omega_0, E). \quad (76.4)$$

Мы видим, что важной величиной, определяющей спектральное распределение образующихся в кристалле электронно-позитронных пар, является отнесенная к единице длины потеря энергии частицей на излучение  $\bar{\Delta}(E)$ . В рассматриваемом случае, когда потери энергии связаны в основном с низкоэнергетическими фотонами, при движении частиц под малым углом  $\psi$  и кристаллографической оси, согласно (71.5),

$$\bar{\Delta}(E) = \eta \frac{E}{m^2 d L_R}, \quad (76.5)$$

где  $d$  — расстояние между атомами вдоль кристаллографической оси, вблизи которой происходит движение, и  $\eta$  — коэффициент порядка единицы, определяемый потенциалом кристаллической решетки.

Формула (76.5) справедлива, если выполняются условия

$$\omega \sim 2E^2 \psi / m^2 R \ll E, \quad E \gg m^2 d.$$

Она показывает, что даже в очень тонком кристалле ( $L \ll L_R$ ) потеря энергии частицей на излучение  $\Delta \mathcal{E} = L \bar{\Delta}(E)$  может стать сравнимой с  $E$ . Это означает, что образование электронно-позитронной пары в этом случае необходимо рассматривать с учетом последующего излучения частицами пары фотонов. Таким образом, даже в очень тонких кристаллах фотонный

ливень может оказать значительное влияние на спектральное распределение образующихся в мишени электронно-позитронных пар.

## § 77. Развитие ливня в поликристалле

В предыдущих параграфах мы изучали развитие электромагнитного ливня в монокристалле. При этом было показано, что при высоких энергиях частиц ливень в кристалле может развиваться на малых длинах:

$$t \sim \frac{\psi d}{R} L_R \ll L_R.$$

В случае кристалла свинца, например, при  $E = 1000$  ГэВ и  $\psi = 10^{-4}$  рад., длина  $L^* \sim (\psi d/R) L_R$ , на которой развивается ливень, по порядку величины равна  $L^* \sim 10$  мкм. В этих условиях, очевидно, достаточно для наблюдения эффекта, чтобы размеры кристалла были такого же порядка, что и  $L^*$ . Иными словами, нет необходимости в больших кристаллах, и мы приходим к задаче о развитии ливня не в монокристалле, а в поликристалле, зерна которого (кристаллиты) должны быть порядка или больше  $L^*$ .

При развитии ливня в поликристалле уравнения каскадной теории (72.1) и (72.2) должны быть усреднены по ориентациям кристаллитов. Если размеры кристаллитов очень малы,  $r \ll L^*$ , то развитие ливня в поликристалле не будет отличаться от развития ливня в аморфной среде. Действительно, в этом случае изменение ливневых функций в пределах отдельных кристаллитов будет незначительным и, следовательно, усредняться в уравнениях (72.1) и (72.2) должны вероятности  $w_{\text{coh}}^{\pm}$  и  $w_{\text{coh}}$ . Дифференциальные по переданным импульсам и по энергиям вероятности  $w_{\text{coh}}^{\pm}$  и  $w_{\text{coh}}$  отличаются от соответствующих вероятностей для аморфной среды только множителем

$$B = \frac{1}{N} \sum_{n,k} \exp [iq(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_k)], \quad (77.1)$$

где  $N$  — число атомов кристаллика,  $\mathbf{r}_n$  — положения атомов в решетке и  $\mathbf{q}$  — переданный импульс. Усреднив  $B$  по всем ориентациям кристаллика, легко показать, что  $B$  практически не отличается от единицы [12, 13]. Если, например, взаимодействие частиц происходит с отдельной цепочкой  $N$  атомов, расположенных вдоль оси  $z$ , то

$$B = \frac{1}{4\pi N} \int d\theta \sum_{n,k} \exp [iqd(n-k) \cos \theta] = 1 - \frac{\pi}{qd} \left( 1 - \frac{qd}{2\pi} + 2 \left[ \frac{qd}{2\pi} \right] \right), \quad (77.2)$$

где  $\vartheta$  — угол между  $q$  и осью цепочки  $z$  и  $[qd/2\pi]$  — целая часть величины  $(qd/2\pi)$ . Так как основной вклад в сечения излучения и образования электронно-позитронных пар дают значения  $R^{-1} \lesssim q \lesssim m$ , то поправка к единице в  $\bar{B}$ , обусловленная периодичностью атомов в цепочке, пренебрежимо мала. При этом средние значения вероятностей излучения и образования пар в кристаллите практически не будут отличаться от вероятностей излучения и образования пар в аморфной среде и, следовательно, развитие ливня в поликристалле будет происходить так же, как и в аморфной среде. Иными словами, в этом случае на длине порядка радиационной длины  $L_R$  в поликристалле (веществе, состоящем из кристаллитов) должен появиться по крайней мере один фотон или одна электронно-позитронная пара. Этот результат справедлив, если размеры кристаллитов достаточно малы; а именно, если размеры зерен  $r$  малы по сравнению с длиной  $L^*$ , на которой развивается ливень в кристалле.

Если же размер кристаллитов будет сравним с длиной  $L^*$ , то этот вывод будет несправедлив, так как в этом случае ливневые функции будут существенно изменяться в пределах отдельных кристаллитов. При этом на длине порядка  $L_R$  может образоваться уже не одна частица, а большое число частиц — фотонов и электронно-позитронных пар. Таким образом, для того чтобы проявлялся эффект быстрого развития ливня в поликристалле, необходимо, чтобы размер зерен поликристалла был сравним или превосходил длину  $L^*$ .

Для того чтобы на длине  $L_R$  в поликристалле образовалось большое число ливневых частиц, необходимо, чтобы на этой длине хотя бы один кристаллит с  $r \gtrsim L^*$  имел малый угол между кристаллографической осью (или плоскостью) и импульсом частицы. Ясно, что на длине  $L_R$  такое столкновение частицы с кристаллитом будет случайным. Оценим в этой связи вероятность появления большого числа ливневых частиц в поликристалле на радиационной длине.

Когерентные эффекты при развитии ливня в кристалле проявляются как при движении частиц под малым углом  $\psi \ll R/d$  к одной из кристаллографических осей, так и при движении под малым углом  $\theta \ll R^2/d^2$  к одной из кристаллографических плоскостей. Оценим сперва вероятность того, что частица на длине  $L_R$  столкнется с кристаллитом размера  $r \gtrsim L^*$  под малым углом  $\psi$  к его плотно упакованным атомами кристаллическим осям. Эта вероятность по порядку величины равна

$$w_r \sim N_r (2\psi^2) \frac{L_R}{r}, \quad (77.3)$$

где  $N_r$  — число кристаллографических осей в кристаллите, плотно упакованных атомами. Величина  $2\psi^2$  представляет

собой отношение телесного угла, в котором угол между импульсом частицы и одной из кристаллографических осей меньше  $\psi$ , к полному телесному углу; множитель  $L_R/r$  по порядку величины равен числу кристаллов, с которыми сталкивается частица на длине  $L_R$ . При  $r \sim L^*$ , где  $L^* \sim (\psi d/R)L_R$ , согласно (77.3),

$$w_r \sim N_r \frac{\psi R}{d}.$$

Аналогично находим вероятность того, что на длине  $L_R$  частица столкнется с кристаллитом размера  $r \gtrsim L_p^*$  под малым углом  $\theta$  ( $\theta \ll R^2/d^2$ ) к плотно упакованным атомами кристаллографическим плоскостям:

$$w_p \sim N_p \frac{4\theta L_R}{\pi r}, \quad (77.4)$$

где  $N_p$  — число кристаллографических плоскостей, плотно упакованных атомами. При  $r \sim L_p^*$ , где  $L_p^* \sim (\theta d^2 R^{-2})L_R$ , искомая вероятность

$$w_p \sim N_p \frac{4R^2}{\pi d^2}$$

не зависит от угла  $\theta$ .

Сравнивая величины  $w_p$  и  $w_r$ , находим, что в интересующей нас области углов  $\psi$  и  $\theta$  ( $\psi \ll R/d$ ,  $\theta \ll R^2/d^2$ )

$$w_p \gg w_r.$$

При ориентации кристаллических плоскостей (100), (110), (111), (121), (112) и (211) под малыми углами к импульсу частицы в эксперименте хорошо заметны когерентные эффекты при излучении (см., например, работы [28—30]). Учитывая только эти плоскости, находим, что  $w_p \sim 10^{-2}$ .

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### 1. Вычисление континуального интеграла (23.6)

Для вычисления континуального интеграла (23.6) воспользуемся методом, изложенным в работе [23]. С этой целью представим величину  $Q_\omega$  в виде

$$Q_\omega = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dq e^{-q^2} Q_\omega(N, q), \quad (\text{П1.1})$$

где

$$Q_\omega(N, q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\vartheta_1 \dots d\vartheta_N}{(2\pi\sigma\Delta)^{N/2}} \exp \left\{ - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(\vartheta_{n+1} - \vartheta_n)^2}{2\sigma\Delta} + \right. \\ \left. + \mu\vartheta_N^2 - \frac{i\omega\Delta}{2} \sum_{n=1}^N \vartheta_n^2 + q\Delta \sqrt{\frac{2i\omega}{\tau}} \sum_{n=1}^N \vartheta_n \right\}, \quad (\text{П1.2})$$

$\Delta = \tau/N$  и  $\vartheta_0 = 0$ .

Выполнив в (П1.2) замену переменных  $y_n = \vartheta_n (2\sigma\Delta)^{-1/2}$ , получим

$$Q_\omega(N, q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy_1 \dots dy_N}{\pi^{N/2}} \exp \left\{ -b \sum_{n=1}^N y_n - \sum_{n,m=1}^N A_{nm} y_n y_m \right\}, \quad (\text{П1.3})$$

где  $b = 2iq\Delta\sqrt{i\omega\sigma\Delta/\tau}$  и  $A_{nm}$  — матричные элементы матрицы Якоби  $A$  следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} 2+i\omega\sigma\Delta^2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2+i\omega\sigma\Delta^2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \dots & 2+i\omega\sigma\Delta^2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdot & \dots & -1 & 1+i\omega\sigma\Delta^2 - 2\sigma\mu\Delta \end{pmatrix}.$$

Замечая теперь, что существует вещественная ортогональная матрица ( $u$ ), которая приводит матрицу ( $A$ ) к диагональному виду:

$$(u^{-1}Au)_{ik} = a_i \delta_{ik}, \quad (\text{П1.4})$$

где  $a_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ , перейдем в интеграле (П1.3) от переменных  $y_n$  к переменным  $z_n$ , связанным с  $y_n$  соотношениями  $y_n = \sum_{k=1}^N u_{nk} z_k$ . Тогда интеграл (П1.3) примет вид

$$Q_\omega(N, q) = (\det A)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 \dots dz_N \exp \left( b \sum_{n,k=1}^N u_{nk} z_k \right) \times \\ \times \prod_j^N (2\pi\sigma_j^2)^{-1/2} \exp \left( -\frac{z_j^2}{2\sigma_j^2} \right), \quad \sigma_j^2 = \frac{1}{2a_j}. \quad (\text{П1.5})$$



В результате интегрирования по переменным  $Z_n$  находим

$$Q_\omega(N, q) = (\det A)^{-1/2} \exp\left(\frac{1}{2} \overline{\sigma_N^2}\right), \quad (\text{П1.6})$$

где

$$\overline{\sigma_N^2} = b^2 \sum_{j=1}^N \sigma_j^2 \left( \sum_{n=1}^N u_{nj} \right)^2 = \frac{1}{2} b^2 \sum_{n,m=1}^N (A^{-1})_{nm}. \quad (\text{П1.7})$$

Здесь  $(A^{-1})_{nm}$  — матрица, обратная матрице  $(A)$ .

Элементы обратной матрицы могут быть выражены через миноры детерминанта матрицы  $(A)$ . При этом в интересующем нас случае имеем

$$\sum_{n,m=1}^N (A^{-1})_{nm} = \sum_{n=1}^N (D_n D_{n+1})^{-1} \left( \sum_{k=n}^N D_{k+1} \right)^2, \quad (\text{П1.8})$$

где  $D_k$  — минор  $(N-k+1)$ -го порядка детерминанта матрицы  $A$ , расположенный в правом нижнем углу матрицы  $A$  и  $D_{N+1} = 1$ . Используя это соотношение, запишем (П1.6) в виде

$$Q_\omega(N, q) = (D_1)^{-1/2} \exp\left\{ \frac{b^2}{4} \sum_{n=1}^N (D_n D_{n+1})^{-1} \left( \sum_{k=n}^N D_{k+1} \right)^2 \right\}. \quad (\text{П1.9})$$

Входящие в (П1.9) величины  $D_k$  удовлетворяют рекуррентному соотношению:

$$D_k = (2 + i\omega\sigma\Delta^2) D_{k+1} - D_{k+2}, \quad 1 \leq k \leq N-2. \quad (\text{П1.10})$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} D_N &= 1 - i\omega\sigma\Delta^2 - 2\mu\sigma\Delta, \\ D_N - D_{N-1} &= 2\mu\sigma\Delta - O(\Delta^2). \end{aligned} \quad (\text{П1.11})$$

Если вместо  $D_k$  ввести обозначение  $D_k = D(k\Delta)$ , то (П1.10) перейдет в разностное уравнение с начальными условиями (П1.11). При этом в пределе  $N \rightarrow \infty$  величина  $D(k\Delta)$  будет приближаться к значению в точке  $t = k\Delta$  функции  $D(t)$ , являющейся решением уравнения

$$\frac{d^2}{dt^2} D(t) = i\omega\sigma D(t) \quad (\text{П1.12})$$

с начальными условиями

$$D(N\Delta) = D(\tau) = 1, \quad \frac{d}{d\tau} D(\tau) = 2\mu\sigma.$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$D(t) = \text{ch } r(t-\tau) + \frac{2\mu\sigma}{r} \text{sh } r(t-\tau), \quad r = \sqrt{i\omega\sigma}. \quad (\text{П1.13})$$

Используя обозначение  $D_k = D(k\Delta)$ , перепишем (П1.9) в виде

$$Q_\omega(N, q) = (D(\Delta))^{-1/2} \exp\left\{ -iq\omega\sigma\Delta^3 \tau^{-1} \times \right. \\ \left. \times \sum_{n=1}^N [D(n\Delta)D((n+1)\Delta)]^{-1} \left( \sum_{k=n}^N D((k+1)\Delta) \right)^2 \right\}. \quad (\text{П1.14})$$

Подставляя теперь это соотношение в (П1.1) и замечая, что при  $N \rightarrow \infty$  суммы в (П1.14) можно заменить на интегралы по переменной  $t$ , а величину

$D(k\Delta)$  — функцией  $D(t)$  в точке  $t = k\Delta$ , находим окончательно

$$Q_{\omega} = \left\{ D(0) \left[ 1 - \frac{i\omega\sigma}{\tau} \int_0^{\tau} dt D^{-2}(t) \left( \int_t^{\tau} dt' D(t') \right)^2 \right] \right\}^{-1/2}, \quad (\text{П1.15})$$

где  $D(t)$  определяется соотношением (П1.13).

## 2. Дифференциальное сечение и амплитуда рассеяния быстрой заряженной частицы в поле непрерывного потенциала цепочки атомов

Для нахождения сечения упругого рассеяния частиц на цепочке атомов необходимо знать асимптотику волновой функции частицы на большом расстоянии от оси цепочки. Если длина цепочки велика, то можно пренебречь влиянием концов цепочки на рассеяние. При этом волновая функция частицы в поле цепочки будет определяться уравнением

$$\left[ (E - U(\rho))^2 + \frac{d^2}{dz^2} + \frac{d^2}{d\rho^2} - m^2 \right] \Phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (\text{П2.1})$$

описывающим взаимодействие частицы с полем бесконечно длинного цилиндра (для простоты рассматривается случай бесспиновой частицы). Выполнив в (П2.1) разделение переменных

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Psi(\rho) e^{ip_z z}, \quad (\text{П2.2})$$

где  $p_z$  — импульс частицы вдоль оси  $z$  и воспользовавшись тем, что  $|U| \ll E$ , приходим к следующему уравнению для функции  $\Psi(\rho)$ :

$$\left[ \frac{1}{2E} \frac{d^2}{d\rho^2} + \varepsilon_{\perp} - U(\rho) \right] \Psi(\rho) = 0, \quad \varepsilon_{\perp} = \frac{1}{2} E \psi^2. \quad (\text{П2.3})$$

Волновая функция  $\Psi(\rho)$  описывает движение частицы в плоскости, ортогональной оси цепочки. Решение уравнения (П2.3) может быть записано в виде

$$\Psi(\rho) = e^{ip_{\perp} \rho} + \int d^2 \rho' D(\rho - \rho') U(\rho') \Psi(\rho'), \quad (\text{П2.4})$$

где  $p_{\perp} = E\psi$ , ось  $z$  параллельна составляющей импульса падающей частицы, ортогональной оси цепочки, и  $D(\rho - \rho')$  — запаздывающая функция Грина уравнения

$$\left( \frac{1}{2E} \frac{d^2}{d\rho^2} + \varepsilon_{\perp} \right) D(\rho - \rho') = \delta(\rho - \rho'). \quad (\text{П2.5})$$

Из уравнения (П2.5) вытекает, что

$$D(\rho - \rho') = \frac{E}{2i} H_0^{(1)}(p_{\perp} |\rho - \rho'|), \quad (\text{П2.6})$$

где  $H_0^{(1)}(x)$  — функция Ханкеля.

Подставляя найденное значение для функции  $D(\rho - \rho')$  в (П2.4), находим, что на большом расстоянии от оси цепочки ( $\rho \rightarrow \infty$ ) асимптотика волновой функции  $\Psi(\rho)$  имеет вид

$$\Psi(\rho)|_{\rho \rightarrow \infty} = e^{ip_{\perp} \rho} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{ip_{\perp} \rho} f(\varphi), \quad (\text{П2.7})$$

где  $f(\varphi)$  — амплитуда рассеяния частицы в плоскости  $(x, y)$ :

$$f(\varphi) = -\frac{iE}{\sqrt{2\pi i p_{\perp}}} \int d^2 \rho' U(\rho') \Psi(\rho') e^{ip_{\perp} \rho} \quad (\text{П2.8})$$

и  $p'_\perp = p_\perp \rho / \rho$ . При этом дифференциальное сечение рассеяния частицы на цепочке атомов определяется формулой

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = L \psi |f(\varphi)|^2. \quad (\text{П2.9})$$

Амплитуда рассеяния  $f(\varphi)$  может быть выражена через фазы рассеяния частицы на бесконечности  $\eta_n$ . С этой целью разложим функции  $\psi(\rho)$  в ряд Фурье:

$$\psi(\rho) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\rho}} A_n \psi_n(\rho) e^{in\varphi}, \quad (\text{П2.10})$$

где  $A_n$  — коэффициенты разложения и  $\psi_n(\rho)$  — решения уравнения

$$\frac{d^2}{d\rho^2} \psi_n(\rho) + \left( p_\perp^2 - 2EU(\rho) - \frac{n^2 - 1/4}{\rho^2} \right) \psi_n(\rho) = 0. \quad (\text{П2.11})$$

Решения уравнения (П2.11) при  $\rho \rightarrow \infty$  имеют асимптотику вида

$$\psi_n(\rho)|_{\rho \rightarrow \infty} = C_n \sin \left( p_\perp \rho + \eta_n - \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right), \quad (\text{П2.12})$$

где  $C_n$  и  $\eta_n$  — некоторые постоянные (слагаемое  $\left( \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right)$  под знаком синуса выделено для того, чтобы амплитуда рассеяния  $f(\varphi)$  обращалась в нуль при  $\eta_n = 0$ ).

Используя (П2.12), находим, что

$$\psi(\rho)|_{\rho \rightarrow \infty} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n c_n \sin \left( p_\perp \rho - \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \eta_n \right) e^{in\varphi}. \quad (\text{П2.13})$$

Для определения произведения коэффициентов  $A_n$  и  $C_n$  необходимо вычесть из асимптотики (П2.13) соответствующую асимптотику падающей плоскости волны. С этой целью разложим экспоненту  $\exp(ip_\perp x)$  в ряд Фурье:

$$\exp(ip_\perp x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (i^n) \mathcal{J}_n(p_\perp \rho) e^{in\varphi}, \quad (\text{П2.14})$$

где  $\mathcal{J}_n(\alpha)$  — функция Бесселя. Асимптотика этого выражения при  $\rho \rightarrow \infty$  имеет вид

$$\exp(ip_\perp x)|_{\rho \rightarrow \infty} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (i^n) \sqrt{\frac{2}{\pi p_\perp \rho}} \sin \left( p_\perp \rho - \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) e^{in\varphi}. \quad (\text{П2.15})$$

Потребовав теперь, чтобы асимптотика волновой функции  $\psi(\rho)$  после вычитания асимптотики падающей волны не содержала слагаемого, соответствующего сходящейся волне, находим, что

$$A_n C_n = (i^n) \sqrt{\frac{2}{\pi p_\perp}} \exp(i\eta_n),$$

и, следовательно,

$$f(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i p_\perp}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (e^{2i\eta_n} - 1) e^{in\varphi}. \quad (\text{П2.16})$$

### 3. Вычисление фаз рассеяния в квазиклассическом приближении

Для нахождения фаз рассеяния  $\eta_n$  в квазиклассическом приближении будем искать решение уравнения (П2.11) в виде

$$\Psi_n(\rho) = g_n(\rho) \exp\left[\frac{i}{\hbar} s_n(\rho)\right]. \quad (\text{П3.1})$$

Функции  $g_n(\rho)$  и  $s_n(\rho)$  в первом приближении по постоянной Планка  $\hbar$  удовлетворяют уравнениям

$$(s'_n)^2 - \left[ p_\perp^2 - 2EU(\rho) - \hbar^2 \left( n^2 - \frac{1}{4} \right) \rho^{-2} \right] = 0, \quad (\text{П3.2})$$

$$2g'_n s'_n + g_n s''_n = 0, \quad (\text{П3.3})$$

где  $s'_n = ds_n(\rho)/d\rho$ . Легко проверить, что решения (П3.2) имеют вид

$$s_n(\rho) = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho \sqrt{p_\perp^2 - 2EU(\rho) - \hbar^2 \left( n^2 - \frac{1}{4} \right) \rho^{-2}}, \quad (\text{П3.4})$$

где  $\rho_0$  определяется из уравнения

$$p_\perp^2 - 2EU(\rho_0) - \hbar^2 \left( n^2 - \frac{1}{4} \right) \rho_0^{-2} = 0.$$

При таком выборе постоянной интегрирования  $\rho_0$  функция  $s_n(\rho)$  будет вещественной при  $\rho > \rho_0$ .

Из уравнения (П3.3) следует, что

$$g_n(\rho) = \text{const} (s'_n(\rho))^{-1/2}. \quad (\text{П3.5})$$

Таким образом, общее решение уравнения (П2.11) имеет вид

$$\Psi_n(\rho) = |s'_n|^{-1/2} \left\{ c_1 \exp\left(\frac{i}{\hbar} s_n(\rho)\right) + c_2 \exp\left(-\frac{i}{\hbar} s_n(\rho)\right) \right\}, \quad (\text{П3.6})$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные постоянные.

В области  $\rho < \rho_0$ , недоступной для классического движения, решение уравнения (П2.11) должно быть экспоненциально убывающим, поэтому

$$\Psi_n(\rho) = c |s'_n|^{-1/2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\hbar} \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho' s'_n(\rho')\right). \quad (\text{П3.7})$$

Из этой формулы следует, что при больших значениях  $\rho$  асимптотика волновой функции  $\Psi_n(\rho)$  имеет вид

$$\Psi_n(\rho) = \text{const} \cdot \sin\left\{ \frac{\pi}{4} + \int_{\rho_0}^{\rho} (s'_n - p_\perp) d\rho + p_\perp(\rho - \rho_0) \right\}. \quad (\text{П3.8})$$

Сравнивая эту асимптотику с формулой (П2.13), находим, что в квазиклассическом приближении

$$\eta_n = \frac{|n|\pi}{2} - p_\perp \rho_0 + \int_{\rho_0}^{\infty} d\rho \left\{ \sqrt{p_\perp^2 - 2EU(\rho) - \frac{\hbar^2}{\rho^2} \left( n^2 - \frac{1}{4} \right)} - p_\perp \right\}. \quad (\text{П3.9})$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

### К г л а в е 1

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: В 10 т.—Т. II: Теория поля.—М.: Наука, 1989.
2. Фейнберг Е. Л. // ЖЭТФ.—1966.—Т. 50.—С. 202.
3. Фейнберг Е. Л. // Проблемы теоретической физики: Сборник статей памяти И. Е. Тамма.—М.: Наука, 1972.—С.248.
4. Шульга Н. Ф. // Проблемы современной теоретической физики.—Киев: Наук. думка, 1982.—С.256.
5. Shul'ga N. F., Fomin S. P. // Phys. Lett.—1986.—V. 114 A.—P. 148.
6. Ахиезер А. И., Шульга Н. Ф. // УФН.—1987.—Т. 151.—С. 385.
7. Schott G. A. // Phil. Mag. Suppl.—1933.—V. 15.—P. 753.
8. Goedecke G. H. // Phys. Rev.—1964.—V. 135 B.—P. 281.
9. Bohm D., Weinstein M. // Phys. Rev.—1948.—V. 74.—P. 1789.
10. Devaney A. J., Wolf E. // Phys. Rev. D.—1973.—V. 8.—P. 1044. J. Math. Phys.—1974.—V. 15.—P. 234.
11. Ландау Л. Д., Померанчук И. Я. // Докл. АН СССР.—1953.—Т. 92.—С. 735.
12. Ахиезер А. И., Шульга Н. Ф. // УФН.—1982.—Т. 137.—С. 561.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: В 10 т.—Т. VI: Электродинамика сплошных сред.—М.: Наука, 1986.
14. Черенков П. А. // Докл. АН СССР.—1934.—Т. 2.—С. 451.
15. Вавилов С. И. // Докл. АН СССР.—1934.—Т. 2.—С. 457.
16. Тамм И. Е., Франк И. М. // Докл. АН СССР.—1937.—Т. 14.—С. 107.
17. Франк И. М. // Изв. АН СССР. Сер. физ.—1942.—Т. 6.—С. 3.
18. Болотовский Б. М. // Труды ФИАН СССР.—1982.—Т. 140.—С. 95—139.
19. Тер-Микаелян М. Л. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях.—Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1969.
20. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Теоретическая физика: В 10 т.—Т. IV: Квантовая электродинамика.—М.: Наука, 1989.
21. Vethe H., Heitler B. // Proc Roy; Soc.—1934.—V. 146.—P. 83.
22. Гайтлер В. Квантовая теория излучения.—М.: Гостехиздат, 1956.
23. Тер-Микаелян М. Л. // ЖЭТФ.—1953.—Т. 25.—С. 296.
24. Ландау Л. Д., Померанчук И. М. // Докл. АН СССР.—1953.—Т. 92.—С. 535.
25. Фейнберг Е. Л. // УФН.—1956.—Т. 58.—С. 193.
26. Galitsky V. M., Gurevich I. I. // Nuovo Cimento.—1964.—V. 32. P. 396.
27. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика.—М.: Наука, 1981.
28. Иваненко Д. Д., Соколов А. А. Классическая теория поля.—М.: Гостехиздат, 1951.
29. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон.—М.: Наука, 1974.
30. Джексон Д. Классическая электродинамика: Пер. с англ.—М.: Мир, 1965.
31. Байер В. Н., Катков В. М., Фадин В. С. Излучение релятивистских электронов.—М.: Атомиздат, 1973.
32. Кулипанов Г. Н., Скрипский А. Н. // УФН.—1977.—Т. 122.—С. 369.
33. Гинзбург В. Л. // Изв. АН СССР. Сер. физ.—1947.—Т. 11.—С. 165.

34. *Моу Г.* // Миллиметровые и субмиллиметровые волны: Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1959.— С. 317.
35. *Корхмазян Н. А.* // Изв. АН АрмССР. Физика.— 1970.— Т. 5.— С. 287, 418; Т. 7.— 114.
36. *Байер В. Н., Катков В. М., Страховенко В. М.* // ЖЭТФ.— 1972.— Т. 63.— С. 2121.
37. *Геворгян Л. А., Корхмазян Н. А.* // ЖЭТФ.— 1979.— Т. 76.— С. 1226.
38. *Алферов Д. Ф., Баймаков Ю. А., Бессонов Е. Г.* // Тр. ФИАН СССР.— 1975.— Т. 80.— С. 100.
39. *Гинзбург В. Л.* Теоретическая физика и астрофизика.— М.: Наука, 1981.
40. *Базылев В. А., Жеваго Н. К.* Излучение быстрых частиц в веществе и во внешних полях.— М.: Наука, 1987.
41. *Маршалл Т.* Лазеры на свободных электронах: Пер. с англ.— М.: Мир, 1987.
42. *Никитин М. М., Энн В. Я.* Ондюляторное излучение.— М.: Энергоатомиздат, 1988.

## К г л а в е 2

1. См. [27] к гл. 1.
2. *Raaij W.* // Helv. Phys. Acta.— 1932.— V. 5.— P. 179.
3. *Голдштейн Г.* Классическая механика.— М.: Наука, 1975.
4. *Van Vleck J. H.* // Proc. Nat. Acad. Sci.— 1928.— V. 14.— P. 178.
5. *Ford K. W., Wheeler I. A.* // Ann. of Phys. 1959.— V. 7.— P. 259.
6. *Schiller R.* // Phys. Rev.— 1962.— V. 125.— P. 1100.
7. *Miller W. H.* // Adv. Chem. Phys.— 1974.— V. 25.— P. 69.
8. *Berry M. V., Mount K. E.* // Rep. on Progr. Phys.— 1972.— V. 35.— P. 315.
9. *Gutzwiller M. C.* // J. Math. Phys.— 1971.— V. 12.— P. 343.
10. *Маслов В. П., Федорюк М. В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики.— М.: Наука, 1976.
11. *Блохинцев Д. И.* // Физика высоких энергий и теория элементарных частиц.— Киев: Наук. думка, 1967.— С. 778.
12. *Ахиезер А. И., Болдышев В. Ф., Шульга Н. Ф.* // Теорет. и мат. физика.— 1975.— Т. 23.— С. 11.
13. *Ахиезер А. И., Болдышев В. Ф., Шульга Н. Ф.* // Физика элементарных частиц и атомного ядра. (ЭЧАЯ).— 1979.— Т. 10.— С. 52.
14. *Glauber R. J.* High energy collision theory // Lectures in Theoretical physics / Ed. by W. E. Brittin, L. Dunham.— New York: Interscience Publishers Inc.— 1959.— V. 1.— P. 315.
15. *Ситенко А. Г.* // Укр. Физ. журн.— 1959.— Т. 4.— С. 152.
16. *Wallace S. J.* // Ann. of Phys.— 1973.— V. 78.— P. 190.
17. *Vaker A.* // Phys. Rev. D.— 1972.— V. 6.— P. 3462.
18. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Наука, 1971.
19. *Морс Ф. М., Фейнбах Г.* Методы теоретической физики: Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1958.— Т. 1.
20. См. (23) к гл. 1.
21. *Калашиников Н. П., Коптелов Э. А., Рязанов М. И.* // Письма в ЖЭТФ.— 1972.— Т. 15.— С. 120.
22. См. (19) к гл. 1.
23. См. (21) к гл. 1.
24. *Frish O. R., Olson D. N.* // Phys. Rev. Lett.— 1959.— V. 3.— P. 141.
25. См. [6] к гл. 1.
26. *Ахиезер А. И., Болдышев В. Ф., Шульга Н. Ф.* — Ядер. физика.— Т. 22.— С. 1185.
27. *Bethe H., Maximon L.* // Phys. Rev.— 1954.— V. 93.— P. 768.
28. *Olsen H., Maximon L., Wergeland H.* // Phys. Rev.— 1957.— V. 106.— P. 27.
29. *Farry W.* // Phys. Rev.— 1934.— V. 46.— P. 391.
30. *Sommerfeld A., Maue A.* // Ann. d. Phys.— 1935.— V. 22.— P. 629.
31. *Шульга Н. Ф., Фомин С. П.* // Письма в ЖЭТФ.— 1978.— Т. 27.— С. 126.
32. *Никишов А. И.* // Ядер. физика.— 1981.— Т. 34.— С. 134.
33. *Фомин С. П., Шульга Н. Ф.* — // Проблемы ядерной физики и космических лучей.— Харьков: Изд-во ХГУ, 1981.— Вып. 14.— С. 72.

34. Ахиезер А. И., Трутень В. И., Фомин С. П., Шульга Н. Ф. // Докл. АН СССР.—1979.—Т. 249.—С. 338.
35. Schwinger J. // Proc. Nat. Acad. Sci.—1954.—V. 40.—P. 132.
36. Байер В. Н., Катков В. М. // ЖЭТФ.—1967.—Т. 53.—С. 1478; 1968.—Т. 55.—С. 1542.
37. См. [31] к гл. 1.
38. Соколов А. А., Клепиков Н. Г., Тернов И. М. // ЖЭТФ.—1953.—Т. 24.—С. 249.
39. Клепиков Н. Г. // ЖЭТФ.—1954.—Т. 26.—С. 19.
40. Ахиезер А. И., Ласкин Н. В., Шульга Н. Ф. // Докл. АН СССР.—1988.—Т. 303.—С. 78.
41. Никишов А. И., Ритус В. И. // ЖЭТФ.—1967.—Т. 52.—С. 1707.
42. Ритус В. И. // Труды ФИАН СССР.—1979.—Т. 111.—С. 5.
43. См. (20) к гл. 1.

### К г л а в е 3

1. Ландау Л. Д., Померанчук И. Я. // Докл. АН СССР.—1953.—Т. 92.—С. 735.
2. См. [13] к гл. 1.
3. См. [19] к гл. 1.
4. Тер-Микаелян М. Л. // Докл. АН СССР.—1954.—Т. 94.—С. 1033.
5. Moliere G. // Z. Naturforsch.—1948.—V. 3a.—P. 78.
6. Bethe H. // Phys. Rev.—1953.—V. 89.—P. 1256.
7. Ахиезер А. И., Пелетминский С. В. Методы статистической физики.—М.: Наука, 1977.
8. Росси Б. Частицы больших энергий.—М.: Гостехиздат, 1955.
9. См. [12] к гл. 1.
10. Мигдал А. Б. // Докл. АН СССР.—1954.—Т. 96.—С. 49.
11. Зельдович Я. Б., Соколов Д. Д. // УФН.—1985.—Т. 146.—С. 493.
12. Мигдал А. Б. // ЖЭТФ.—1957.—Т. 32.—С. 633.
13. См. [31] к гл. 1.
14. Мигдал А. Б. // Докл. АН СССР.—1955.—Т. 105.—С. 77.
15. Терновский Ф. Ф. // ЖЭТФ.—1960.—Т. 39.—С. 171, 491.
16. Гольдман И. И. // ЖЭТФ.—1960.—Т. 38.—С. 1866.
17. Пафомов В. Е. // ЖЭТФ.—1965.—Т. 49.—С. 1222.
18. Рязанов М. И. // УФН.—1974.—Т. 114.—С. 393.
19. Пафомов В. Е. // Труды ФИАН СССР.—1969.—Т. 44.—С. 28.
20. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям / Пер. с англ.—М.: Мир, 1968.
21. Ласкин Н. В., Мазманишвили А. С., Шульга Н. Ф. // Докл. АН СССР.—1984.—Т. 277.—С. 850; —М.; ЦНИИАтоминформ, Препринт/ХФТИ. 1984.—№ 84—25.
22. Ласкин Н. В., Мазманишвили А. С., Насонов Н. Н., Шульга Н. Ф. // ЖЭТФ.—1985.—Т. 88.—С. 763.
23. Гельфанд И. М., Яглом А. М. // УМН.—1956.—Т. 11.—С. 77.
24. Пафомов В. Е. // Докл. АН СССР.—1973.—Т. 213.—С. 819.
25. Базылев В. А., Варфоломеев А. А., Жеваго Н. К. // ЖЭТФ.—1974.—Т. 66.—С. 464.
26. Базылев В. А., Глебов В. И., Денисов Э. И. и др. // Письма в ЖЭТФ.—1981.—Т. 34.—С. 103; ЖЭТФ.—1981.—Т. 81.—С. 1664.
27. См. [40] к гл. 1.
28. Ахиезер А. И., Ласкин Н. В., Шульга Н. Ф. // Докл. АН СССР.—1987.—Т. 295.—С. 1363.
29. Ахиезер А. И., Трутень В. И., Фомин С. П., Шульга Н. Ф. // Докл. АН СССР.—1979.—Т. 249.—С. 338.

### К г л а в е 4

1. Williams E. // K. Danske Vidensk. Selsk.—1935.—V. 13.—P. 4.
2. Ferretti V. // Nuovo Cimento.—1950.—V. 7.—P. 118.
3. Тер-Микаелян М. Л. Интерференционное излучение сверхбыстрого электрона в кристалле: Автореф. канд. дисс.—М.: ФИАН СССР, 1952.

4. См. [23] к гл. 1.
5. *Uberall H.* // *Phys. Rev.*—1956.—V. 103.—P. 1055.
6. *Diambrini G.* // *Rev. Mod. Phys.*—1968.—V. 40.—P. 611.
7. См. [19] к гл. 1.
8. *Timm U.* // *Fortschr. Phys.*—1971.—Bd 17.—S. 765.
9. *Kovalenko G. D., Kolesnikov L. Ya., Rubashkin A. L.* // *Coherent Radiation Sources.*—V. 38; *Topic in Current Physics/Ed. by A. W. Saenz, H. Uberall.* Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer-Verlag.—1985.—P. 33.
10. *Потылицын А. П.* Поляризованные фотонные пучки высокой энергии.—М.: Энергоатомиздат, 1987.
11. *Ахмезер А. И., Фомин П. И., Шульга Н. Ф.* // Письма в ЖЭТФ.—1971.—Т. 13.—С. 713.
12. См. [13] к гл. 2.
13. См. [12] к гл. 1.
14. *Шульга Н. Ф.* Электромагнитные процессы при прохождении частиц высоких энергий через вещество: Автореф. докт. дисс.—Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1984.
15. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика: В 10 т.—Т. 6: Электродинамика сплошных сред.—М.: Наука, 1986.
16. *Ахмезер А. И., Померанчук И. Я.* Некоторые вопросы теории ядра.—М.: Гостехиздат, 1950.
17. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления.—Т. 2.—М.: Наука, 1966.
18. *Линдхард Й.* // УФН.—1969.—Т. 99.—С. 249.
19. *Gemmill D. S.* // *Rev. Mod. Phys.*—1974.—V. 46.—P. 129.
20. *Болдышев В. Ф., Шульга Н. Ф.* // Труды VIII Всесоюзного совещания по физике взаимодействия заряженных частиц с монокристаллами.—М.: Изд-во Моск. ун-та, 1977.—С. 84.

#### К г л а в е 5

1. *Lindhard J.* // *Dansk. Vid. Selsk. Math.—Phys. Medd.*—1965.—V. 34.
2. *Moliere G.* // *Z. Naturforsch.*—1947.—Bd 2a.—S. 133.
3. См. [19] к гл. 4.
4. *Месси Н., Мотт Г.* Теория атомных столкновений: Пер. с англ.—М.: Мир, 1969.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика: В 10 т.—Т. III: Квантовая механика (нерелятивистская теория).—М.: Наука, 1989.
6. *Golovchenko I. A.* // *Phys. Rev. Ser. B.*—1976.—V. 13.—P. 4672.
7. *Кумахов М. А., Ширмер Г.* Атомные столкновения в кристаллах.—М.: Атомиздат, 1980.
8. См. [40] к гл. 1.
9. *Трутенъ В. И., Фомин С. П., Шульга Н. Ф.*—Препринт/ХФТИ АН УССР—Харьков, 1982.—№ 82—10.
10. *Байер В. Н., Катков В. М., Страховенко В. М.* // Докл. АН СССР, 1985.—Т. 282.—С. 851; ЖЭТФ.—1987.—Т. 92.—С. 1228.
11. *Чириков Б. В.* Атом. энергия.—1959.—Т. 6.—С. 630.
12. *Арнольд В. И.* Математические методы механики.—М.: Наука, 1979.
13. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика: Пер. с англ.—М.: Мир, 1984.
14. *Заславский Г. М.* Стохастичность динамических систем.—М.: Наука, 1984.
15. *Henon M., Heiles C.* // *Astron. J.*—1964.—V. 69.—P. 73.
16. *Gustavson F.* // *Astron. J.*—1966.—V. 21.—P. 670.
17. *Болотин Ю. Л., Гончар В. Ю., Трутенъ В. И., Шульга Н. Ф.* // Тезисы докладов XV Всесоюз. совещания по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами.—М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985.—С. 71; Укр. физ. ж.—1986.—Т. 31.—С. 14.
18. *Shul'ga N. F., Bolotin Yu. L., Gonchar V. Yu., Truten' V. I.* // *Phys. Lett.*—1987.—V. 123.—P. 357.
19. См. [6] к гл. 1.
20. См. [1] к гл. 1.



21. *Базылев В. А., Глебов В. И., Головизнин В. В.* // Докл. АН СССР.—1986.— Т. 288.—С. 105.
22. *Шульга Н. Ф., Трутень В. И., Фомин С. П.* // ЖЭТФ.—1984.— Т. 87.— С. 250.
23. См. [5] к гл. 2.
24. *Ньютон Р.* Теория рассеяния волн и частиц: Пер. с англ.—М.: Мир, 1969.
25. *Бернштейн Р.* Квантовые эффекты при упругом рассеянии молекул // Исследования с молекулярными пучками: Пер. с англ.—М.: Мир, 1969.—С. 88.
26. *Ван де Хюлст Г.* Рассеяние света малыми частицами: Пер. с англ.—М.: ИЛ, 1961.
27. *Fran W. E.* Wave Mechanics of heavy-ion collisions // Heavy-Ion, High-Spin States and Nuclear Structure.—Vienna: International Atomic Energy Agency.—1975.— V. 1.—P. 157.
28. *Фомин С. П., Шульга Н. Ф.*—Препринт/ХФТИ АН УССР.—Харьков, 1979.— № 79-42.
29. *Fomin S. P., Shul'ga N. F.* // Phys. Lett.—1979.—V. 73A.—P. 131.
30. *Shul'ga N. F., Truten' V. I.* // Phys. Lett.—1983.—V. 96A. P. 307.
31. *Шульга Н. Ф., Болотин Ю. Л., Гончар В. Ю., Трутень В. И.* // Тезисы докладов XVI Всесоюзного совещания по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами.—М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.—С. 3; Докл. АН СССР.—1987.—Т. 296.—С. 1104.
32. *Robnic M., Berry M. V.* // J. Phys.—1985.—V. 18A.—P. 1361.
33. *Khodyrev V. A.* // Phys. Lett.—1985.—V. 111A.—P. 63.
34. *Белошицкий В. В., Кумахов М. А.* // ФТТ.—1973.—Т. 15.—С. 1588.
35. *Шульга Н. Ф., Трутень В. И., Фомин С. П.* // ЖТФ.—1982.—Т. 52.—С. 796.
36. *Dumas H. S., Ellison J. A.* Particle channeling in crystals and the method of averaging // Local and global methods of non-linear dynamics / Ed. by A. W. Saenz.—Springer-Verlag, 1986.

#### К г л а в е 6

1. См. [1] к гл. 5.
2. См. [19] к гл. 4.
3. *Kutakhov M. A.* // Phys. Lett.—1976.—V. 57A.—P. 17.
4. *Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Шульга Н. Ф.*—Препринт/ХФТИ АН УССР.—Харьков, 1978.— № 78-17.—23 с.; ЖЭТФ.—1979.—Т. 76.—С. 1244.
5. *Шульга Н. Ф., Трутень В. И., Фомин С. П.*—Препринт // ХФТИ АН УССР.—Харьков, 1980.— № 80-32.
6. См. [12] к гл. 1.
7. *Байер В. Н., Катков В. М., Страховенко В. М.* // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 263.—С. 855.
8. *Vaier V. N., Katkov V. M., Strakhovenko V. M.* // Phys. Lett.—1979.—V. 73A.—P. 414.
9. *Шульга Н. Ф., Трутень В. И., Фомин С. П.* // Письма в ЖТФ.—1980.—Т. 6.—С. 1037.
10. *Базылев В. А., Глебов В. И., Жеваго Н. К.* // ЖЭТФ.—1980.—Т. 78.—С. 62.
11. *Vazylev V. A., Glebov V. I., Zhevago N. K.* // Rad. Eff.—1981. V. 56.—P. 99.
12. *Гендеништейн Л. Э., Пегушин Е. В.* // ЖТФ.—1984.—Т. 54.—С. 38.
13. *Wedell R.* // Phys. Stat. Sol. (b)—1980.—V. 99.—P. 11.
14. *Базылев В. А., Жеваго Н. К.* // УФН.—1982.—Т. 137.—С. 605.
15. *Beloshitsky V. V., Komarov F. F.* // Phys. Rep.—1982.—V. 93.—P. 118.
16. *Барышевский В. Г.* Каналирование, излучение и реакции в кристаллах при высоких энергиях.—Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1982.
17. *Кумахов М. А.* Излучение каналированных частиц в кристаллах.—М.: Энергоатомиздат, 1986.
18. См. [40] к гл. 1.
19. *Uggerhoj E.* // Physica Scripta.—1983.—V. 28.—P. 331.
20. См. [19] к гл. 1.
21. *Ferretti V.* // Nuovo Cimento.—1972.—V. 7B.—P. 225.
22. *Шульга Н. Ф., Гендеништейн Л. Э., Мирошниченко И. И. и др.* // ЖЭТФ.—1982.—Т. 82.—С. 50.

23. *Жеваго Н. К.* // ЖЭТФ.— 1978.— Т. 75.— С. 1389.
24. *Жеваго Н. К.* Теория рентгеновского и  $\gamma$ -излучения релятивистскими частицами при их взаимодействии с веществом: Автореф. докт. дисс.— М.: 1983.
25. *Saenz A. W., Uberall H.* Coherent Radiation Sources.— V. 38: Topic in Current Physics / Ed. by A. W. Saenz, H. Uberall. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer-Verlag.— 1985.— P. 1.
26. *Казан Ю. М., Бабаханян Э. А., Кононец Ю. В.* // Письма в ЖЭТФ.— 1980.— Т. 31.— С. 776.
27. *Babakhanyan E. A., Kononets Yu. V.* // Phys. Stat. sol. (b).— 1980.— V. 98.— P. 59.
28. *Бабаханян Э. А., Воробьев С. А., Кононец Ю. В., Попов Д. Е.* // Письма в ЖЭТФ.— 1982.— Т. 35.— С. 184.
29. *Тулупов А. В.* // ФТТ.— 1984.— Т. 26.— С. 96.
30. *Воробьев С. А. и др.* // Докл. АН СССР.— 1987.— Т. 297.— С. 80.
31. *Chevganov V. A., Feranchuk I. D.* // J. Physique.— 1982.— V. 43.— P. 1687.
32. *Хириш П., Хови А., Николсон Р. и др.* Электронная микроскопия тонких кристаллов: Пер. с англ.— М.: Мир, 1968.
33. *Казан Ю. М., Кононец Ю. В.* // ЖЭТФ.— 1970.— Т. 58.— С. 226, 1974.— Т. 64.— С. 1042; Т. 66.— С. 1693.
34. *Оцуки Ё.-Х.* Взаимодействие заряженных частиц с твердыми телами: Пер. с англ.— М.: Мир, 1985.
35. *Базылев В. А., Белошицкий В. В., Глебов В. И. и др.* // ЖЭТФ.— 1981.— Т. 80. С. 608—624.
36. См. [40] к гл. 1.
37. *Жеваго Н. К., Хоконов Х. М.* // ЖЭТФ.— 1984.— Т. 87.— С. 56.
38. *Andersen J. U., Eriksen K. R., Laegsgaard E.* // Phys. Scripta.— 1981.— V. 24.— P. 588.
39. *Тулупов А. В.* // ЖЭТФ.— 1984.— Т. 86.— С. 1365.
40. *Белошицкий В. В., Кумахов М. А.* // Докл. АН СССР.— 1980.— Т. 251.— С. 331.
41. *Трутень В. И., Фомин С. П., Шульга Н. Ф.* // Труды XIII Всесоюзного совещания по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.— С. 134.
42. *Akhiezer A. I., Shul'ga N. F.* // Rad. Eff.— 1986.— V. 91.— P. 197.

## К г л а в е 7

1. *Шульга Н. Ф.* // Письма в ЖЭТФ.— 1980.— Т. 32.— С. 179.
2. См. [12] к гл. 1.
3. См. [22] к гл. 5.
4. *Shul'ga N. F., Truten' V. I., Fomin S. P.* // Phys. Lett.— 1983. V. 98 A.— P. 135.
5. *Шульга Н. Ф.* // Проблемы теоретической физики.— Киев: Наук. думка, 1986.— С. 298.
6. *Ганенко В. Б., Жебровский Ю. В., Пегушин Е. В. и др.* // Тезисы докладов XVI Всесоюзного совещания по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.
7. *Кумахов М. А.* // ЖЭТФ.— 1977.— Т. 72.— С. 1489.
8. См. [40] к гл. 1.
9. *Жеваго Н. К., Хоконов М. Х.* // ЖЭТФ.— 1984.— Т. 87.— С. 56.
10. См. [10] к гл. 6.
11. *Kutakhov M. A., Trikalinos Ch.* // Phys. Stat. Sol. (b).— 1980.— V. 99.— P. 449.
12. *Авакян А. Л., Жеваго Н. К., Ян Шу.* — ЖЭТФ.— 1982.— Т. 82.— С. 2038.
13. *Avakian A. L., Yang C., Zhevago N. K.* // Rad. Eff.— 1981.— V. 56.— P. 39.
14. *Трутень В. И., Шульга Н. Ф.* // Труды XIV Всесоюзного совещания по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами. М.: Изд-во МГУ, 1985.— С. 80.
15. *Ганенко В. Б., Гендеништейн Л. Э., Мирошниченко И. И. и др.* // Письма в ЖЭТФ.— 1980.— Т. 32.— С. 397.
16. *Авакян Р. О., Авакян Э. О., Аветисян А. Э. и др.* Препринт / ЕрФИ.— Ереван, 1984.— № 704 (19)-84.

17. *Boldishev B. F., Kasilov V. I., Kovalenko G. D. et al.* Abstracts of 12th International conference on atomic collisions in Solids.—Okayama (Japan).—1987.  
Nucl. Instr. Meth.—1988.—V. B 33.—P. 30.
18. *Baryshevskij V. G., Tikhomirov V. V.*//Phys. Lett.—1982.—V. 90a.—P. 153.
19. *Барышевский В. Г., Тихомиров В. В.*//ЖЭТФ.—1983.—Т. 85.—С. 232.
20. *Kimball K. C., Cue N., Roth L. M., Marsh B. B.*//Phys. Rev. Lett.—1983.—V. 50.—P. 950.
21. *Baier V. N., Katkov V. M., Strakhovenko V. M.*//Phys. Lett.—1984.—V. 104A.—P. 231.
22. *Байер В. Н., Катков В. М., Страховенко В. М.*//ЖЭТФ.—1986.—Т. 90.—С. 801.
23. *Kimball J. C., Cue N.*//Phys. Rev.—1985.—V. 125.—P. 71.
24. *Kimball J. C., Cue N.*//Phys. Rev. Lett.—1984.—V. 52.—P. 1747.  
Nucl. Instr. Meth.—1986.—V. B13.—P. 1.
25. *Байер В. Н., Катков В. М., Страховенко В. М.*//ЖЭТФ.—1987.—Т. 92.—С. 1228.
26. *Baier V. N., Katkov V. M., Strakhovenko V. M.*//Phys. Lett.—1986.—V. 114A.—P. 511.
27. *Барышевский В. Г., Тихомиров В. В.*//ЖЭТФ.—1986.—Т. 90.—С. 1908.
28. *Рутус В. И.*//Труды ФИАН СССР.—1979.—Т. 111.—С. 5.
29. См. [19] к гл. 1.
30. *Ferretti B., Gamberini G.*//Lett. Nuovo Cimento.—1970.—V. 3.—P. 113.
31. *Ferretti B.*//Nuovo Cimento.—1972.—V. 7B.—P. 225.
32. См. [13] к гл. 2.
33. См. [6] к гл. 1.
34. *Ласкин Н. Ф., Мазманишвили А. С., Шульга Н. Ф.*//Докл. АН СССР.—1984.—Т. 277.—С. 850.
35. *Ласкин Н. В., Мазманишвили А. С., Насонов Н. Н., Шульга Н. Ф.*//ЖЭТФ.—1985.—Т. 88.—С. 763.
36. *Varishevskij V. G., Tikhomirov V. V.*//Nucl. Instr. and Meth. Ser. A.—1985.—V. 234.—P. 430.
37. *Насонов Н. Н., Шульга Н. Ф.*//Укр. физ. журн.—1982.—Т. 27.—С. 789.
38. *Ахиезер А. И., Ласкин Н. В., Шульга Н. Ф.*//Докл. АН СССР.—1987.—Т. 295.—С. 1363.
39. *Рытов С. М.* Введение в статистическую радиофизику.—Ч. I. Случайные процессы М.: Наука, 1976.
40. *Шульга Н. Ф., Фомин С. П.*//Письма в ЖЭТФ.—1978.—Т. 27.—С. 126.
41. См. [5] к гл. 1.
42. *Терновский Ф. Ф.*//ЖЭТФ.—1960.—Т. 39.—С. 171.

## К г л а в е 8

1. *Andersen S. K., Fich O., Nielsen H. et al.*//Nucl. Phys. B.—1980.—V. 167.—P. 1.
2. См. [18] к гл. 4.
3. *Шульга Н. Ф., Трутень В. И., Малышевский В. С.*//ЖЭТФ.—1987.—Т. 93.—С. 570.
4. *Любошиц В. Л., Подгорецкий М. И.*//ЖЭТФ.—1984.—Т. 87.—С. 717.
5. *Трутень В. И., Шульга Н. Ф.*//Вопросы атомной науки и техники. Сер. Общая и ядерная физика.—1984.—Вып. 2 (27).—С. 21.
6. См. [22] к гл. 5.
7. См. [26] к гл. 6.
8. *Базылев В. А., Глебов В. И., Головизнин В. В.*//Докл. АН СССР.—1986.—Т. 288.—С. 105.
9. *Шульга Н. Ф.*//Проблемы теоретической физики.—Киев: Наук. думка, 1986.—С. 298.
10. *Глебов В. И., Головизнин В. В., Қанлоев А. М.*—Препринт/ИАЭ им. И. В. Курчатова.—М., 1984.—№ 3905/1.
11. *Мороховский В. Л., Шраменко Б. И.*//Труды VII Всесоюзного совещания по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами.—М.: Изд-во МГУ, 1976.—С. 173.

12. Ганенко В. Б., Генденштейн Л. Э., Мирошниченко И. И. и др. // Письма в ЖЭТФ.—1980.—Т. 32.—С. 397.
13. Адейшвили Д. И., Бочек Г. Л., Витько В. И. и др. // Письма в ЖТФ.—1984.—Т. 10.—С. 197.
14. Антипенко А. П., Болдышев В. Ф., Касилов В. И. и др. // Докл. АН СССР.—1986.—Т. 291.—С. 589.
15. Базылев В. А., Головизнин В. В. // ЖЭТФ.—1986.—Т. 91.—С. 25.
16. Зельдович Я. Б., Молчанов С. А., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. // ЖЭТФ.—1985.—Т. 89.—С. 2061.
17. Ласкин Н. В., Фомин С. П., Шульга Н. Ф. // Тезисы докладов XVII Всесоюзного совещания по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами.—М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.—С. 21; Докл. АН СССР.—1988.—Т. 301.—С. 855.
18. Белошицкий В. В., Кумахов М. А. // ЖЭТФ.—1982.—Т. 82.—С. 462.
19. См. [7] к гл. 3.
20. Гришаев И. А., Мороховский В. Л., Шраменко Б. И. // Труды V Всесоюзного совещания по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами.—М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974.

## К г л а в е 9

1. Bethe H. A. // Ann. de Phys.—1930.—V. 5.—P. 325.
2. Bloch F. // Zs. Phys.—1933.—Bd 81.—S. 363.
3. Bohr N. // Phil. Mag.—1913.—V. 25.—P. 10; 1915.—V. 30. P. 581.
4. Fermi E. // Phys. Rev.—1940.—V. 57.—P. 485.
5. Fermi E. Nuclear Physics.—Chicago.—1950. Перевод: Ферми Э. Ядерная физика: Пер. с англ.—М.: ИЛ, 1951.
6. Möller C. // Ann. de Phys.—1932.—V. 14.—P. 531.
7. Bethe H. A. Handbuch der Physik.—Berlin.—1933.—Bd 24. S. 273.
8. См. [13] к гл. 1.
9. Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В., Ситенко А. Г., Степанов К. Н. Электродинамика плазмы.—М.: Наука, 1974.
10. Франк И. М., Тамм И. Е. // Докл. АН СССР.—1937.—Т. 14.—С. 109.
11. Киржниц Д. А. // Письма в ЖЭТФ.—1987.—Т. 46.—С. 244.
12. Гинзбург В. Л., Франк И. М. // ЖЭТФ.—1946.—Т. 16. С. 15; J. of Phys. USSR.—1945.—V. 9.—P. 353.
13. См. [20] к гл. 1.
14. Landau L. D. // J. of Phys.—1944.—V. 8.—P. 201.
15. Калашиников Н. П., Ремизович В. С., Рязанов М. И. Столкновения быстрых заряженных частиц в твердых телах.—М.: Атомиздат, 1980.
16. Чудаков А. Б. // Изв. АН СССР. Сер. физ.—1955.—Т. 19.—С. 651.
17. Берестецкий В. Б., Гешкенбейн Б. В. // ЖЭТФ.—1956.—Т. 31.—С. 722.
18. Brandt W., Ratkowski A., Ritchie R. H. // Phys. Rev. Lett.—1974.—V. 33.—P. 1325.
19. Каган Ю. М., Кононец Ю. В., Джаманкызов Н. К. // ЖЭТФ.—1978.—Т. 74.—с. 288.
20. Lindhard J., Winther A. // Dansk. Vid. Selsk. Mat.-Phys. Medd.—1964.—V. 34.
21. См. [18] к гл. 4.
22. Khodyrev V. A. // Phys. Lett.—1985.—V. 111A.—P. 63.
23. Кадменский А. Г., Лебедев Н. Ю., Тулинов А. Ф. // Тезисы докладов XIV Всесоюзного совещания по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами.—М.: Изд-во МГУ, 1984.
24. Uggerhoj E. // Physica Scripta.—1983.—V. 28.—P. 331.
25. Beloshitsky V. V., Komarov F. F., Kumakhov M. A. // Phys. Rep.—1986.—V. 139.—P. 293.
26. Померанчук И. Я. // ЖЭТФ.—1939.—Т. 9.—С. 915.
27. См. [1] к гл. 1.
28. Ахиезер А. И., Шульга Н. Ф. // ЖЭТФ.—1983.—Т. 85.—С. 94.
29. Соколов А. А., Тернов А. А. // ЖЭТФ.—1953.—Т. 25.—С. 698.
30. См. [21] к гл. 1.
31. См. [27] к гл. 1.

2. Landau L. D., Rumer U. // Proc. Roy. Soc.—1938.—V. 166A.—P. 213.
3. См. [8] к гл. 3.
4. Euges L. // Phys. Rev.—1949.—V. 76.—P. 264.
5. Белолицкий В. В., Кумахов М. А. // ЖЭТФ.—1982.—Т. 82.—С. 462—472.
6. Телегин В. И., Хоконов М. Х. // ЖЭТФ.—1982.—Т. 83.—С. 260.
7. Базылев В. А., Глебов В. И., Головизнин В. В. // Докл. АН СССР.—1986.—Т. 288.—С. 105;  
ЖЭТФ.—1986.—Т. 91.—С. 25.

## К г л а в е 10

1. Bhabha H. J., Heitler W. // Proc. Roy. Soc.—1937.—V. 159A. P. 432.
2. Carlson A. G., Oppenheimer J. R. // Phys. Rev.—1937.—V. 51.—P. 220.
3. Landau L. D., Rumer U. // Proc. Roy. Soc.—1938.—V. 166A.—P. 213.
4. Тамм И. Е., Бельский С. З. // J. Phys. USSR.—1939.—V. 1.—P. 177
5. Rossi B., Greisen K. // Rev. Mod. Phys.—1941.—P. 240.
6. Бельский С. З. Лавинные процессы в космиче ах.—М.: Гостехиздат, 1948.
7. Snyder H. S. // Phys. Rev.—1938.—V. 53.—P. 560
8. Serber R. // Phys. Rev.—1938.—V. 54.—P. 317.
9. Bhabha H. J., Chakrabarty S. K. // Proc. Roy. Soc. 43.—V. 181A.—P. 267;  
Phys. Rev.—1948.—V. 74.—P. 1352.
0. См. [22] к гл. 1.
1. См. [8] к гл. 3.
2. См. [5] к гл. 4.
3. См. [19] к гл. 1.
4. Schein M., Haskin D. M., Glasser R. G. // Phys. Rev.—1954.—V. 95.—P. 855.
5. Debenedetti A., Garelli C. M., Tallone L. et al. // Nuovo Cimento.—1954.—V. 12.—P. 954.
6. Koshiha M., Kaplon M. F. // Phys. Rev.—1955.—V. 100.—P. 327.
7. Barbanti Silva L., Bonacini C., Depietri C. // Nuovo Cimento.—1956.—V. 3.—P. 1465.
8. Бонч-Осмоловский А. Г., Подгорецкий М. И., Яблоков В. И. // Ядро Физика.—1979.—Т. 29.—С. 432.
9. Ерлыкин А. Д., Куличенко А. К., Мачаварианц С. К., Никольский С. И. // Труды ФИАН СССР.—1979.—Т. 109.—С. 109.
10. Erlykin A. D., Kulichenko A. K., Nkolsky S. I., Chubenko A. P. // Preprint/FIAN.—Moscow, 1981.—№ 80.
11. Кулибаба В. И., Коваленко Г. Д. // ЖЭТФ.—Т. 78.—С. 433.
12. Ахизер А. И., Шульга Н. Ф. // Письма в ЖЭТФ.—1980.—Т. 32.—С. 318.
13. См. [28] к гл. 9.
14. Наджафов И. М., Миранцев Л. В., Раджабов М. Р. // Изв. АН СССР. Сер. физ.—1987.—Т. 51.—С. 986.
15. Baier V. N., Katkov V. M., Strakhovenko V. M. // Instr. and Meth. in Physics Research.—1987.—V. B27.—P. 360.
16. Ахизер А. И., Трутень В. И., Шульга Н. Ф. // Докл. АН СССР.—1987.—Т. 292.—С. 338.
17. Akhiezer A. I., Truten' V. I., Shul'ga N. F. // Phys. Lett.—1987.—V. 123A.—P. 361.
18. Мирошниченко И. И., Мёрри Д. Д., Авакян Р. О., Физгут Г. Х. // Письма в ЖЭТФ.—1979.—Т. 29.—С. 786.
19. Alguard M. J., Swent R. H., Pantell R. H. et al. // Phys. Rev. Lett.—1979.—V. 42.—P. 1148.
20. Витько В. И., Грицаев И. А., Коваленко Г. Д., Шраменко Б. И. // Письма в ЖТФ.—1979.—Т. 5.—С. 1291.